

Universidad de las Ciencias Informáticas

Facultad 6



Algoritmo para la creación de volúmenes de restricción para búsqueda mínima en modelos de bloques geológicos.

TRABAJO DE DIPLOMA PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE INGENIERO EN CIENCIAS
INFORMÁTICAS

Autor: Carlos Alain Quintana Valdés

Tutor: Ing. Eddy Dangel Quesada Rodríguez

La Habana, junio de 2013
“Año 54 de la Revolución”

La felicidad existe sobre la tierra y se conquista con el ejercicio de la razón, el conocimiento de la armonía del universo y la práctica constante de la generosidad. Ser bueno es el único modo de ser dichoso, ser culto es el único modo de ser libre.

José Martí

Declaración de autoría

Declaro por este medio que yo, Carlos Alain Quintana Valdés con carné de identidad 89010630048, soy el autor de este trabajo y que autorizo a la Universidad de las Ciencias Informáticas a hacer uso del mismo en su beneficio, así como los derechos patrimoniales con carácter exclusivo.

Para que así conste, firma la presente declaración jurada de autoría en La Habana a los ____ días del mes ____ del año _____.

Carlos Alain Quintana Valdés
Autor

Eddy Dangel Quesada Rodríguez
Tutor

Datos de contacto

Ing. Eddy Dangel Quesada Rodríguez.

Ing. en Ciencias Informáticas, UCI, 2008. Profesor Instructor.

E-mail: edquezada@uci.cu

A mis padres, abuelos y hermanos.

A mis padres, por preocuparse todo el tiempo por mi educación e instrucción; a la madre de mi madre, quien me enseñó a disfrutar el estudio; a mi tía o segunda madre, que me cuida tanto; a mis abuelos por enseñarme tantas cosas útiles; a mis hermanos, hermanas y amigos; a mi tutor, nadie mejor preparado que él de quien tomar ejemplo como profesor investigador.

Resumen

El uso de métodos computacionales para analizar datos de la industria minera permite obtener con exactitud marcos de referencia para utilizar eficientemente los recursos disponibles. En esta investigación se mostrarán los resultados de la implementación de un algoritmo que permite definir volúmenes de restricción sobre modelos de bloques geológicos teniendo en cuenta diferentes ángulos de inclinación de las paredes del yacimiento, cuyo objetivo es reducir el espacio de búsqueda de los algoritmos de diseño de minas a cielo abierto que son ejecutados posteriormente sobre este modelo, los cuales tienen un costo computacional exponencialmente grande. El algoritmo creado resuelve el problema eficientemente debido a su propia lógica y a las estructuras de datos empleadas para manejar la información geológica.

Palabras clave:

Algoritmos de diseño de minas, geometría computacional, volumen de restricción.

Abstract

The use of computational methods to analyze data from the mining industry allows obtaining accurate frameworks to efficiently use available resources. This research will show the results of implementing an algorithm to obtain a restriction volume on geological block models considering different slope angles, which aims to reduce the search space of open pit design algorithms which are subsequently executed on this model, which have an exponentially large computational cost. The algorithm efficiently solves the problem due to its own logic and the data structures used to manage the geological information.

Keywords:

Computational geometry, open pit design algorithm, restriction volume.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN ----- 1

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA INVESTIGACIÓN ----- 5

 1.1. Conceptos asociados al dominio del problema. ----- 5

 1.2. Análisis de los procesos de diseño de minas a cielo abierto. ----- 6

 1.2.1. Ángulos de talud.----- 8

 1.2.2. Análisis de algoritmos de optimización.----- 10

 1.3. Volúmenes de restricción.----- 12

 1.3.1. Optimización del diseño de minas a cielo abierto mediante la integración de los métodos expuestos.----- 16

 1.4. Análisis de estructuras de datos espaciales. ----- 17

 1.4.1. Linear Octree: Índice espacial aplicado a estructuras geológicas. ----- 19

 1.5. Conclusiones parciales ----- 19

CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA ----- 21

 2.1. Métodos de la geometría computacional. ----- 21

 2.2. Propiedades matemáticas empleadas.----- 21

 2.2.1. Elementos de geometría euclidiana. Propiedades utilizadas.----- 22

 2.2.2. Definición de polígonos. ----- 24

 2.2.3. Interpolación de puntos. Splines. ----- 27

 2.2.4. Punto dentro de un polígono. ----- 30

 2.3. Ángulos de talud según acimuts. ----- 31

 2.4. Índices y coordenadas en un modelo de bloques geológicos.----- 32

 2.5. Características del algoritmo creado.----- 32

 2.6. Descripción en pseudocódigo de los principales algoritmos.----- 35

 2.6.1. Calcular factor de escalado. ----- 35

 2.6.2. Calcular ángulo entre segmentos que se intersectan. ----- 35

 2.6.3. Crear volumen de restricción.----- 36

 2.6.4. Hallar bloques dentro de polígonos. ----- 38

 2.7. Conclusiones parciales ----- 39

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	40
3.1. Consideraciones generales.	40
3.2. Datos de prueba. Validación del uso de interpolación.	41
3.3. Datos de prueba. Algoritmo usando polígonos base generados aleatoriamente.	43
3.4. Datos de prueba. Algoritmo usando diferentes ángulos de talud.	44
3.5. Datos de prueba. Validación del uso de QHash.	46
3.6. Análisis de la complejidad temporal.	49
3.7. Conclusiones parciales	50
CONCLUSIONES GENERALES.....	52
RECOMENDACIONES.....	53
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	54
BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA.....	57
ANEXOS.....	58
Anexo 1. Imágenes de los métodos creados en la herramienta desarrollada.	58
GLOSARIO DE TÉRMINOS	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Ilustración 1: Fases que componen el proceso de diseño de una mina a cielo abierto.....6

Ilustración 2: Modelo de bloques limitado por la zona del yacimiento y coloreado de acuerdo a la ley mineral. Tomado de GEMCOM Surpac.....7

Ilustración 3: Mina de diamantes de Udachnaya, Rusia. Foto: Alexander Stapanov.8

Ilustración 4: Modelo de bloques en dos dimensiones de una mina. (Elaboración propia).9

Ilustración 5: Ángulos de talud en un yacimiento minero. (Elaboración propia).9

Ilustración 6: Representación del diseño final de una mina a cielo abierto.....13

Ilustración 7: Secuencia de extracción sin emplear algoritmo de volumen de restricción.15

Ilustración 8: Volumen de restricción sobre el cual realizar las operaciones de optimización.16

Ilustración 9: Vista superior del modelo de bloques. Anillo de restricción superficial.16

Ilustración 10: Objeto geométrico representado por una malla de tetraedros.....17

Ilustración 11: Representación de la jerarquía de nodos en un Octree.18

Ilustración 12: Sistema de ejes coordenados rectangulares. Elaboración propia.22

Ilustración 13: Vector a con cada una de sus componentes (a_x, a_y, a_z) en el espacio R^323

Ilustración 14: Polígono complejo. Existe al menos una intersección entre sus lados. (Elaboración propia).
.....24

Ilustración 15: Polígono simple y regular. (Elaboración propia).25

Ilustración 16: Polígono simple, irregular y convexo. No existe intersección de lados, todos los ángulos interiores son menores que π . (Elaboración propia).....25

Ilustración 17: Polígono simple, irregular y cóncavo. No existe intersección de lados, hay al menos un ángulo interior mayor que π . (Elaboración propia).26

Ilustración 18: Expansión de un polígono respecto a su centroide. Vista lateral (izquierda), vista superior (derecha).27

Ilustración 19: Gráfico de la función $f(x) = 1 / (1 + 12x^2)$ y de su polinomio de interpolación con 11 nodos igualmente espaciados en el intervalo $[-1, 1]$. Error de interpolación. (Imagen tomada del curso Matemática Numérica en el EVA).28

Ilustración 20: Splines de Kochanek-Bartels. Parámetros de control de la curva.29

Ilustración 21: Algoritmo para determinar si un punto yace dentro de un polígono.....30

Ilustración 22: Modelo de bloques (vista superior), con sectores definidos según acimuts, para definir ángulos de talud en éstos.	31
Ilustración 23: Polígonos definidos por niveles. (Vista de la herramienta).	34
Ilustración 24: Resultados sin usar interpolación.....	42
Ilustración 25: Validación de resultados usando interpolación.....	42
Ilustración 26: Tiempos de ejecución en pruebas aleatorias.	44
Ilustración 27: Crear volumen de restricción en diferentes modelos. Tiempos de ejecución.	45
Ilustración 28: Creación de volúmenes de restricción equivalentes en modelos de diferente dimensión.	46
Ilustración 29: Tiempo necesario para construir los modelos de bloques.....	47
Ilustración 30: Consumo de memoria de cada modelo de bloques.	48
Ilustración 31: Crear un actor visual para un volumen de restricción definido.	48
Ilustración 32: Mostrar el volumen de restricción.....	49
Ilustración 33: Vista superior del modelo de bloques. Polígonos creados en cada nivel o banco.	58
Ilustración 34: Modelo de bloques con volumen de restricción definido sin usar interpolación.	58
Ilustración 35: Modelo de bloques con volumen de restricción definido usando interpolación.....	59
Ilustración 36: Varios volúmenes de restricción con diferentes parámetros creados en un mismo modelo de bloques.	59

INTRODUCCIÓN

La industria minera a nivel mundial hace uso de *software* especializado en analizar los datos obtenidos en el terreno por los geólogos con el objetivo de modelar y planificar de forma óptima los procesos de explotación de minerales. En Cuba se comenzó a utilizar *software* para realizar algunos de los procesos de este tipo a partir de 1983 con aplicaciones específicas que resolvían problemas puntuales en la geología del petróleo y la geofísica (Rodríguez, 2009).

Desde esa época se ha venido imponiendo el uso intensivo de la computación en las actividades relativas al minado de los yacimientos minerales cubanos. Con el desarrollo de las microcomputadoras y las redes se produjo un verdadero salto en la disponibilidad técnica de hardware y software en las minas que extraen el mineral níquelífero cubano. Sin embargo, el desarrollo de los recursos humanos y de la ciencia de la dirección del proceso de informatizar estas empresas no ha logrado el ritmo impuesto por el desarrollo tecnológico y las necesidades de desarrollo del país (Legrá, 2003).

Con el auge de las campañas de prospección geológica para conocer las reservas de minerales en Cuba y el gran volumen de datos resultantes de estas, fue necesario contar con aplicaciones especializadas y confiables que manejaran esta información, pudieran estimar las reservas y realizar la planificación de las excavaciones. Ante la urgencia de los compromisos de negocios con las empresas de capital extranjero, se decidió adquirir software minero en el mercado internacional por lo que se hizo una compra a empresas extranjeras especializadas en sistemas internacionalmente validados en el área, tales como GEMS y Surpac de la empresa GEMCOM.

Actualmente en Cuba se lleva a cabo un proceso de migración a plataformas tecnológicas soberanas para llevar al mínimo los gastos por concepto de importaciones de *software* y lograr una independencia tecnológica que viabilice el desarrollo económico. La Universidad de las Ciencias Informáticas es fundamental en este empeño, en ella se crea el proyecto Sistema Minero Cubano adjunto al centro de Geoinformática y Señales Digitales (GEYSED) de la Facultad 6 con el objetivo de dotar a la industria minera cubana de un producto que permita diseñar, planificar y optimizar la actividad minera, reduciendo los costos por conceptos de licencia, soporte y capacitación, adecuándose de igual forma a las exigencias internacionales en el área.

Estos sistemas informáticos invariablemente necesitan funcionalidades que se encarguen de modelar y diseñar las canteras que serán excavadas, tomando en consideración varios parámetros que aseguran en gran medida la rentabilidad económica del proyecto y su factibilidad técnica. Debido a que los modelos de bloques geológicos (estructura mediante la cual se modelan computacionalmente los yacimientos minerales) pueden ser muy extensos, es necesario definir un volumen de restricción para la búsqueda mínima y solamente utilizar para el diseño de la mina los bloques geológicos que estén dentro de éste, ya que realizar las operaciones sobre la totalidad del modelo tiene un costo computacional demasiado alto.

Uno de los aspectos más importantes a definir dentro del diseño de una mina a cielo abierto es el límite físico que tendrá la cantera, generalmente en forma de cono irregular invertido, el cual debe seguir restricciones de ángulos de talud¹ según las características del terreno y el tipo de minería realizada, por tanto es imprescindible hallar el volumen de restricción mínimo que permita servir de base a los posteriores algoritmos de planeación óptima de las excavaciones. La morfología del yacimiento obliga a que en muchas ocasiones el volumen de restricción tenga que utilizar ángulos de talud variables, lo cual complejiza el modelado y la resolución del problema.

Al considerar la situación problemática expuesta se llega al siguiente **problema a resolver**: ¿Cómo disminuir el costo computacional garantizando que se procese el menor número de bloques geológicos para optimizar el diseño de una mina a cielo abierto?

Este problema tiene por **objeto de estudio** los algoritmos de optimización de diseño de minas, enmarcado en los procesos de creación de volúmenes de restricción para la optimización del diseño de minas a cielo abierto como **campo de acción**.

Luego de definir sobre cuál dominio del conocimiento incidirá la investigación, se propone como **objetivo general** implementar algoritmos para la creación de volúmenes de restricción para la optimización del diseño de minas a cielo abierto.

Para concretar este objetivo y dividir el problema en partes cuya resolución pueda ser planificada y medida objetivamente se proponen los siguientes **objetivos específicos**:

¹Ángulo de talud: ángulo que define la inclinación de pared en una excavación a cielo abierto.

- Diseñar e implementar un algoritmo para la creación de volúmenes de restricción para búsqueda mínima según ángulos de talud.
- Implementar una herramienta para visualizar los resultados de los algoritmos implementados.

Después de planteadas las principales cuestiones teóricas referentes al dominio del problema, se expone la **idea a defender**: si se implementan algoritmos para definir volúmenes de restricción en modelos de bloques geológicos se optimizará el proceso de diseño de minas a cielo abierto y se reducirá considerablemente su costo computacional.

Para organizar el trabajo en la presente investigación se definieron como **tareas de la investigación**:

- Caracterizar los procesos asociados a la optimización del diseño de minas a cielo abierto.
- Documentar las características y estructura de un modelo de bloques.
- Caracterizar las principales herramientas informáticas y las soluciones teóricas que optimizan el diseño de canteras a cielo abierto.
- Caracterizar las técnicas de creación de volúmenes de restricción de búsqueda mínima según ángulos de talud.
- Diseñar e implementar algoritmos para la creación de volúmenes de restricción de búsqueda mínima.
- Implementar una herramienta para visualizar los resultados y realizar un análisis de los mismos.

Este trabajo estuvo guiado por los preceptos de la metodología de la investigación científica con el fin de exponer claramente el problema científico existente y organizar la investigación para asegurar su resolución de forma eficiente.

Los **métodos teóricos** empleados fueron:

- **Analítico - Sintético**: Se investigó en diferentes medios especializados tales como sitios web de empresas mineras y productoras de *software* para la geología y la minería, revistas y publicaciones científicas cubanas y extranjeras sobre este tema, con el fin de lograr un compendio de información actualizada que permitiera sintetizar el conocimiento sobre el problema a resolver.
- **Histórico-Lógico**: Se estudió la evolución de los métodos para diseñar minas a cielo abierto y los diferentes parámetros que intervienen en estos procesos para conseguir diseñar un método

eficiente de crear un volumen de restricción en modelos de bloques geológicos, adaptado a las condiciones de la minería cubana y utilizando una estructura de datos que permita mejorar el rendimiento en esta funcionalidad.

- **Modelado:** Este método se utilizó para hacer las pruebas necesarias con el fin de representar claramente la solución del problema. Se crea un modelo utilizando valores reales, los cuales son analizados mediante los algoritmos creados para comparar los resultados.

El **método empírico** usado fue el siguiente:

- **Observación:** Se utilizaron los principales software mineros disponibles (GEMCOM, DATAMINE) con el fin de conocer cómo realizan el diseño de minas a cielo abierto estas aplicaciones de gran uso a nivel mundial en el ámbito de las empresas geólogo-mineras.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El proceso de diseñar y planificar óptimamente la explotación de una mina parte de la necesidad de realizar la extracción de los minerales de forma económicamente rentable y eficiente, además de asegurar que sea factible de realizar de acuerdo a diversos criterios ingenieriles y físicos del yacimiento. Este trabajo se realiza utilizando aplicaciones informáticas especializadas, las cuales emplean diferentes algoritmos que permiten obtener diseños flexibles que ayudan a los especialistas a seleccionar la opción más adecuada según las condiciones objetivas de la empresa minera.

En este capítulo se fundamentará teóricamente la presente investigación, se describirán los procesos de diseño de minas a cielo abierto, los algoritmos de optimización de diseño de minas a cielo abierto y los métodos para crear volúmenes de restricción en modelos de bloques geológicos.

1.1. Conceptos asociados al dominio del problema.

Banco: Escalón o unidad de explotación en sentido vertical sobre la que se desarrolla el trabajo de extracción en las minas a cielo abierto. Niveles en que se divide una explotación a cielo abierto para facilitar el trabajo de los equipos de perforación, cargue y transporte.

Cantera: Se entiende por cantera el sistema de explotación a cielo abierto (rajo o tajo abierto) para extraer de él rocas o minerales.

Geotecnia: Aplicación de los métodos científicos y los principios de la ingeniería a la adquisición, la interpretación y el conocimiento de los materiales de la corteza terrestre, orientados a la solución de los problemas de ingeniería. Abarca las áreas de mecánica de rocas y suelos, y muchos de los aspectos cubiertos por la geología, la geofísica, la hidrología y las ciencias relacionadas.

Ley de corte (cut off): Es la concentración mínima que debe tener un elemento en un yacimiento para ser económicamente explotable, es decir, la concentración que hace posible pagar los costes de su extracción, su tratamiento y su comercialización.

Tomados de la ley 76: Ley de minas de la República de Cuba.

1.2. Análisis de los procesos de diseño de minas a cielo abierto.

La planificación minera es aquella actividad de la Ingeniería de Minas que define el proceso mediante el cual se transforma el recurso mineral en el mejor negocio productivo para el accionista (Rubio, 2008).

Los proyectos mineros dividen su ejecución en diferentes etapas en las cuales intervienen especialistas de varias ramas. Primeramente se realizan campañas de prospección y se obtiene la información necesaria del terreno disponible. A continuación se obtienen modelos geológicos de la zona y se realizan diferentes estudios que permiten analizar y avalar la posible rentabilidad de su explotación.

Por ser tan complejo el diseño de una mina a cielo abierto se ha dividido el proceso en dos fases que permiten analizar el flujo de trabajo (**Ilustración 1**). Estas dos fases son el planeamiento técnico de un esquema y la evaluación y selección de la mejor alternativa (DATAMINE, 2003).

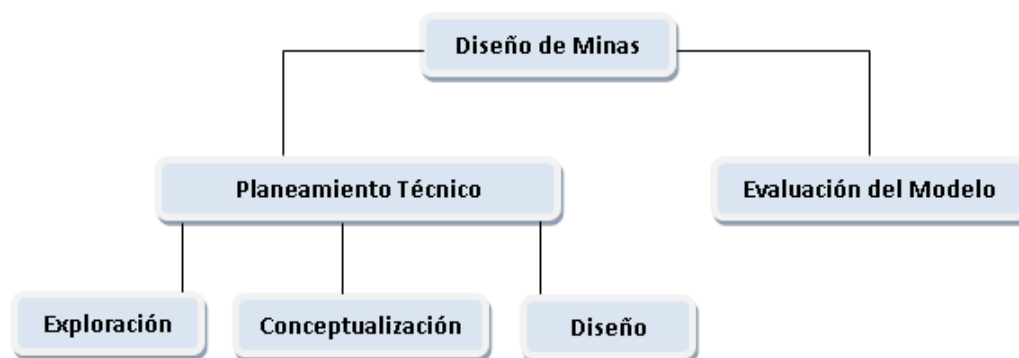


Ilustración 1: Fases que componen el proceso de diseño de una mina a cielo abierto.

La elección de un método de explotación de un yacimiento mineral se basa principalmente en una decisión económica (costos, beneficio, inversiones, flujos de caja.). Esta decisión está relacionada con múltiples factores propios del yacimiento tales como:

- Ubicación, tamaño, topografía superficial, profundidad del cuerpo mineral.
- Tipo de mineral, complejidad y calidad de la mineralización.
- Distribución de la calidad de la mineralización (selectividad).
- Características del macizo rocoso.

- Calidad de la información de reservas.
- Inversiones asociadas.

La explotación de un yacimiento por el método de rajo abierto utiliza datos iniciales los cuales son procesados mediante herramientas informáticas a modo de obtener un modelo de bloques. Este modelo de bloques mostrado en (**Ilustración 2**) consiste en una matriz tridimensional de bloques de dimensiones definidas por su largo, ancho (generalmente iguales) y alto, valor que se conoce como altura de banco.

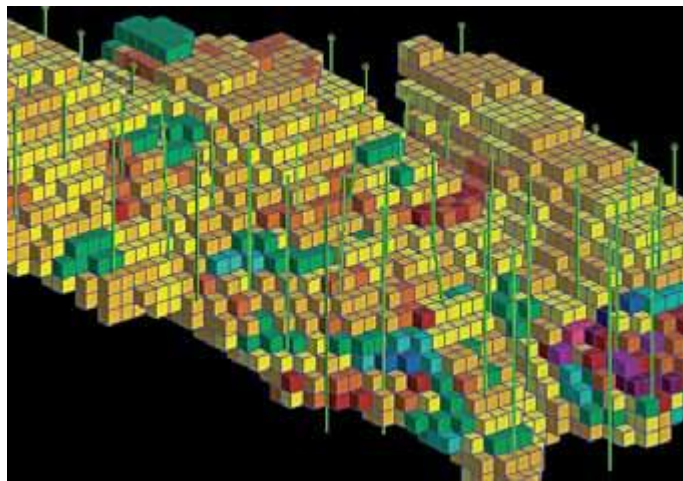


Ilustración 2: Modelo de bloques limitado por la zona del yacimiento y coloreado de acuerdo a la ley mineral. Tomado de GEMCOM Surpac.

La cantidad y calidad de la información que se tenga sobre el yacimiento que se desea explotar incide directamente en los resultados económicos. La evaluación del modelo es un proceso complejo que realizan los especialistas una vez que se han modelado las condiciones del terreno y se ha diseñado la explotación, con lo que se logra una representación muy aproximada a la realidad. Esto permite obtener soluciones y proyectar futuros escenarios en un proyecto minero.

Dentro de la planificación de la explotación de una mina a cielo abierto la elección de la secuencia óptima de extracción de minerales constituye el punto que asegura en mayor medida el buen desenvolvimiento del proyecto en términos técnico-económicos. El hueco óptimo representa la envolvente mayor posible de explotar cuyo minado es económicamente rentable. Es un estado geométrico de la mina que muestra al

yacimiento luego de su total explotación y se puede considerar como la situación de la mina al final de su vida útil (Peña, 2012).



Ilustración 3: Mina de diamantes de Udachnaya, Rusia. Foto: Alexander Stapanov.

En una explotación a cielo abierto (**Ilustración 3**), dada su geometría, sus propiedades geológicas y las técnicas actuales de explotación, es necesario extraer gran cantidad de material estéril (este es el material que no contiene el mineral buscado, o lo contiene en una proporción muy baja, por debajo de la ley de corte o Cut Off, que no paga por el proceso de su extracción y tratamiento) (DATAMINE, 2003).

El objetivo principal del diseño de minas a cielo abierto es obtener la secuencia óptima de extracción de bloques correspondiente al mayor valor actual neto (VAN).

1.2.1. Ángulos de talud.

El problema de la estabilidad de las paredes o taludes en el diseño de minas a cielo abierto es considerado fundamental debido a las grandes implicaciones en materia de seguridad durante la explotación del yacimiento. Conjuntamente con los estudios geológicos del terreno, se le presta un interés especial al estudio geomecánico para evaluar todos los parámetros que deben ser tomados en cuenta al calcular los ángulos de talud en el futuro proyecto minero.

Capítulo 2: Descripción de la solución propuesta

Al realizar el diseño de la mina y definir los ángulos de talud en las diferentes secciones de la excavación se debe buscar un balance óptimo entre ángulos lo suficientemente inclinados como para ser económicamente aceptables y suficientemente planos como para ser seguros de explotar (Hoek, y otros, 1981), evitando pérdidas de recursos materiales y vidas humanas debido a fallas del terreno.

Para ilustrar mejor este problema se expone un sencillo ejemplo de una vista en dos dimensiones de un modelo de bloques geológicos en el cual se ha definido un ángulo de talud hipotético de 45° (el ángulo de talud se mide como se muestra en la **Ilustración 5**). Como puede apreciarse en la **Ilustración 4** si el ángulo es demasiado pequeño habrá que extraer gran cantidad de material estéril adyacente para llegar a determinada profundidad, con un consecuente gasto económico y de tiempo. En cambio, si la pendiente es muy inclinada la seguridad de la mina puede verse seriamente comprometida y se pueden presentar fallas estructurales. Para extraer el bloque 16 es necesario extraer todos sus precedentes desde la superficie teniendo en cuenta el ángulo de talud establecido.

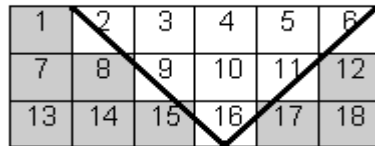


Ilustración 4: Modelo de bloques en dos dimensiones de una mina. (Elaboración propia).

La **Ilustración 5** muestra diferentes parámetros geométricos que se tienen en cuenta en una excavación.

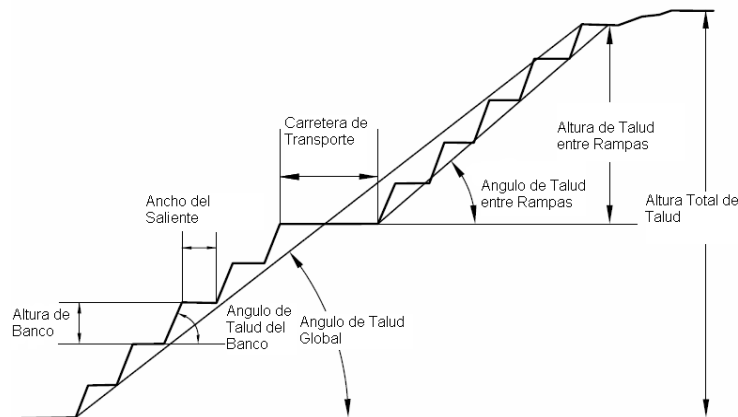


Ilustración 5: Ángulos de talud en un yacimiento minero. (Elaboración propia).

1.2.2. Análisis de algoritmos de optimización.

La utilización de algoritmos especializados para realizar el diseño óptimo de una cantera a cielo abierto constituye un gran avance en la realización de la planificación de la explotación minera. No existe una secuencia que defina cuál será la mejor forma de explotar un yacimiento. En la práctica se utilizan algoritmos que, una vez fijados implícita o explícitamente un conjunto amplio de parámetros, y bajo la supervisión del diseñador o planificador minero, ofrecen distintas alternativas, que resultarán más o menos operativas o factibles, en función de la cantidad y calidad de los parámetros de entrada que el modelo pueda aceptar (Bastante, 2004).

El empleo de algoritmos necesita de un modelo del yacimiento, en forma de bloques tridimensionales, que a su vez pueden estar formados por varios bloques menores, y que pueden tener en su interior información muy variada concerniente a sus dimensiones y coordenadas, al tipo y densidad del material al que representan, leyes o cantidades de metal(es), taludes de la excavación, costes, recuperaciones y precios (Urbina, 1994).

Básicamente un algoritmo de diseño de minas a cielo abierto realiza los siguientes análisis sobre el modelo:

- Recorrer los bloques del modelo analizando los datos que estos contengan de acuerdo a los parámetros prioritarios que hayan definido los especialistas;
- Generar una secuencia de extracción que maximice el beneficio acumulado (resultado de calcular el precio o ganancia de extracción de cada bloque);
- En cada paso tener en cuenta los bloques superiores que condicionan la extracción de los de niveles inferiores (llamados *precedentes* de un bloque).

Los algoritmos usan un modelo de bloques del yacimiento que cubre todo el cuerpo mineral y deja espacio para residuos circundantes suficientes para permitir el acceso a los bloques de mineral que se encuentran ubicados a más profundidad. De éstos, el algoritmo Lerchs-Grossmann, basado en la teoría de grafos, es el único método que garantiza siempre la obtención del diseño del hueco óptimo (GEMCOM, 2013). Sin embargo, el algoritmo original asume ángulos de talud fijos que se rigen por las dimensiones del bloque. Ninguno de los intentos posteriores para incorporar ángulos de talud variables proporciona una solución

adecuada en los casos en los que hay pendientes variables controladas por estructuras complejas de la geología.

Los algoritmos propuestos para maximizar el volumen de extracción de minerales en las minas a cielo abierto están basados en teoría de grafos, programación lineal, programación dinámica, heurística y teoría de redes. La rapidez de respuesta de los ordenadores es un importante estimulante debido al carácter dinámico de los parámetros de entrada del modelo. En la **Tabla 1** se resumen los principales métodos utilizados en el proceso de diseño y optimización del hueco (Peña, 2012).

Método	Año	Algoritmos asociados
Heurística	1965	Cono móvil de Pana
	1974	Algoritmo de Korovob
	1979	Cono móvil de Lemieux
Programación dinámica	1965	Algoritmo de Lerchs-Grossman 2D
Teoría de grafos	1965	Grafos de Lerchs-Grossman 3D
	1969	Lipkewich-Borgman
	1998	Variante de grafos de Lerchs-Grossman por Alford Whittle
Teoría de redes	1968	Johnson's Network Flow Algorithm
	1990	Algoritmo de Dinic
Programación lineal	1969	Algoritmo Simplex Dual

Tabla 1: Algoritmos de diseño y optimización de minas a cielo abierto. (Tomado de **(Peña, 2012)**)

Los algoritmos heurísticos fueron desarrollados en virtud de la poca capacidad de cálculo que tenían los ordenadores en la década de 1960 y 1970, utilizando modelos que tomaban los parámetros del diseño de minas y trataban de llegar a un máximo de la función de beneficios al extraer una secuencia de bloques. En este campo se puede exponer el algoritmo del Cono Flotante de M. Pana (Pana, 1965) el cual fue mejorado por (Lemieux, 1979).

En 1965 Lerchs y Grossman presentaron dos algoritmos para resolver el problema del hueco final (Lerchs, y otros, 1965). El primero está asociado al método de programación dinámica y optimiza dividiendo el modelo de bloques en secciones de dos dimensiones. Su mayor desventaja consiste en que puede resultar imposible ensamblar las secciones optimizadas. El segundo algoritmo permite resolver el problema en tres dimensiones, parte de un grafo dirigido con pesos y consiste en la búsqueda, entre todos los posibles subgrafos, de aquel cuyo peso asociado (la sumatoria de los pesos de todos los nodos pertenecientes al subgrafo), sea máximo. La complejidad temporal es de $O(n^3)$ donde n es el número de bloques en el modelo y requiere de un cierto rigor matemático (Peña, 2012).

Existen varias estrategias para implementar el algoritmo de Lerchs y Grossman en el sentido de la teoría de grafos que fueron adoptadas por Lipkewich y Borgman en el libro que publicaron en 1969 (Lipkewich, y otros, 1969). Su técnica simplifica los cálculos y obtiene resultados bastante aproximados al óptimo pero no tiene la capacidad de manejar las variables de restricciones de la inclinación de talud. Ellos aplicaron su método para una restricción general de 45 grados en un modelo de bloques tridimensional (Peña, 2012). Entre todos estos métodos el que mejores resultados muestra al definir la secuencia óptima de extracción es el de Lerchs-Grossmann, el cual es actualmente el más empleado por los software mineros a nivel mundial (GEMCOM, 2013).

1.3. Volúmenes de restricción.

El problema de esta investigación se centra en definir un volumen de restricción en el modelo de bloques geológicos con el fin de reducir considerablemente la cantidad de análisis que deben realizarse para obtener una secuencia de extracción. Éste está sustentado en bases geométricas, geotécnicas y de requerimientos de implementación en sistemas informáticos que serán expuestas con el fin de su clara comprensión.

Los algoritmos de optimización de diseño de minas toman como entrada un conjunto de parámetros definidos por los geólogos al realizar los estudios sobre el terreno. Estos algoritmos realizan una evaluación de diferentes criterios en todo el modelo de bloques, criterios tanto económicos como geológicos, para definir una secuencia de extracción (DATAMINE, 2003). El costo computacional de estas operaciones usualmente es $O(n^3)$ y dada la gran extensión de los modelos de bloques (generalmente tienen más de 100 000 bloques) reducir el volumen sobre el cual el algoritmo realiza los análisis se convierte en una optimización considerable.

En la mayoría de las ocasiones en que se modela un yacimiento para su posterior explotación, luego de tener en cuenta las condiciones geomorfológicas del terreno, el volumen comprendido para realizar los análisis es irregular geoméricamente, con diferentes condiciones geotécnicas y por lo tanto muy complejo de representar computacionalmente. Esto se simplifica en cierto grado mediante la representación del terreno como un conjunto de bloques o paralelepípedos, pero este enfoque incluye cierto grado de error en los cálculos. Para manejar y reducir este error lo más recomendable es trabajar con modelos de bloques con diferente resolución, es decir, que permitan incluir bloques de diferentes dimensiones contenidos dentro de otros bloques.

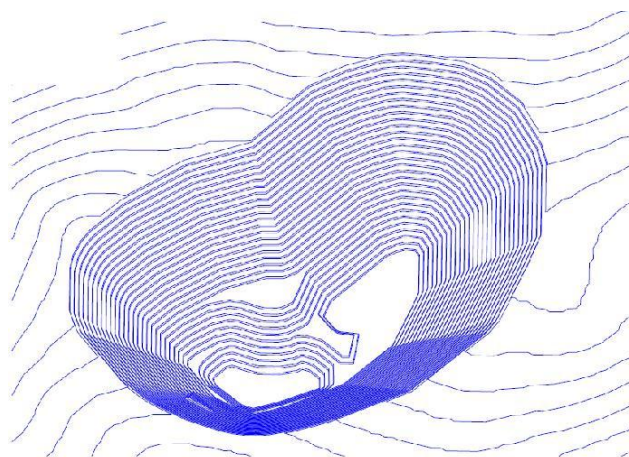


Ilustración 6: Representación del diseño final de una mina a cielo abierto.

Al tener en cuenta las limitaciones en los sistemas actuales de cómputo se hace necesario encontrar la forma más eficiente, entiéndase como reducción de la cantidad de operaciones a realizar y de la cantidad de datos que deben almacenarse, de realizar cierto proceso.

En términos geométricos, para encontrar un volumen se hace necesario conocer ciertos datos en cada una de las dimensiones (altura, ancho, largo) y en dependencia de la complejidad de la forma buscada el proceso se simplifica o se hace prácticamente muy difícil de resolver (operaciones matemáticas usando integrales triples complejas).

En términos computacionales, para resolver cualquier problema primeramente se modela éste en un ámbito generalmente reducido de su existencia, buscando la forma más simple posible de representarlo. El problema de hallar un volumen puede ser abordado desde diferentes perspectivas, en esta investigación se define un método que responde al propio ámbito (1.2.2) en el cual surge el problema a resolver (2.5).

Este volumen comenzará a crearse a partir de un nivel en el eje de las z (banco) dentro del modelo en el cual el usuario defina un polígono base, el cual representa la geometría de la base o fondo del futuro yacimiento. A partir de este polígono se comenzarán a ejecutar una serie de pasos que crearán una expansión a este polígono, teniendo en cuenta su centroide y analizando para cada punto del contorno su ángulo de acimut respecto al norte definido. El hecho de analizar el polígono punto por punto en cada nivel y aplicarle un factor de expansión diferente de acuerdo al ángulo de acimut en el que se encuentre el punto analizado, asegura que se respetará la condición de permitir taludes diferentes en direcciones diferentes.

Para obtener la solución del problema planteado deben exponerse varios aspectos básicos a tener en cuenta:

- Conocer si un punto está o no contenido dentro de una superficie o volumen determinado, el cual puede estar representado por una función matemática o un polígono;
- Definir un *bounding box*² para el polígono o función que encierre el volumen buscado;
- Resolver el problema geométrico de calcular y aplicar los ángulos de talud a cada sección del diseño de la mina teniendo en cuenta que la representación del yacimiento se realiza mediante un modelo de bloques y ésta no es una distribución continua sino discreta de elementos;

² Bounding box: superficie o volumen que contiene completamente a cierto cuerpo geométrico definiendo sus límites dentro de un rectángulo o un paralelepípedo envolvente.

- Definir en cada nivel del modelo de bloques los anillos irregulares que conformarán el volumen de restricción buscado.

La creación de volúmenes de restricción parte de un componente puramente geométrico: el diseño de la mina debe respetar una geometría definida. Los algoritmos de optimización de diseño pueden encontrar la secuencia de extracción óptima, pero en muchos casos se hace muy difícil determinar este resultado debido a la extensión de los modelos sobre los cuales se realizan las operaciones.

La **Ilustración 7** muestra un hipotético caso de la aplicación de uno de los algoritmos de optimización y su resultado. Como puede apreciarse, el algoritmo selecciona los bloques a minar de entre todo el modelo, lo que tiene un costo computacional muy elevado, además de que en no todas las ocasiones se obtiene este resultado teniendo en cuenta los ángulos de talud en todas las direcciones, lo que representa un problema de seguridad y factibilidad técnica para realizar las operaciones de excavación en el terreno.

2	1	1	4	4	0	3	2	2	5	1	1	3	2
2	0	1	2	0	0	5	2	3	1	3	2	1	1
1	0	3	2	1	3	4	5	2	0	1	0	3	3
3	2	2	1	0	4	2	1	2	3	2	3	1	0
0	1	1	4	2	0	2	0	1	1	2	3	2	1
3	1	2	3	1	4	5	3	2	0	3	2	1	1

Ilustración 7: Secuencia de extracción sin emplear algoritmo de volumen de restricción.

Al utilizar un método para restringir el espacio de análisis de los algoritmos de diseño de minas se consigue una reducción drástica de la cantidad de operaciones que tienen que realizarse para lograr el objetivo. La **Ilustración 8** muestra el caso del volumen sobre el cual el algoritmo de diseño de minas debe realizar las operaciones para definir la secuencia óptima de extracción.

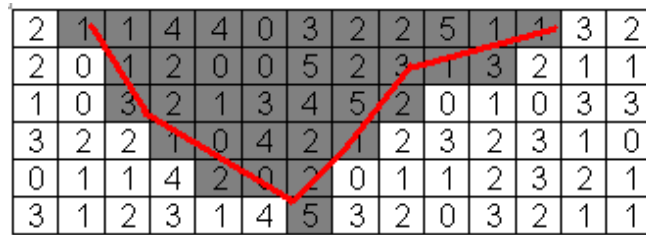


Ilustración 8: Volumen de restricción sobre el cual realizar las operaciones de optimización.

Este volumen de restricción representa la zona geométrica definida por los ángulos de talud del yacimiento y es la región del modelo de bloques en la cual se aplicará el algoritmo de diseño.

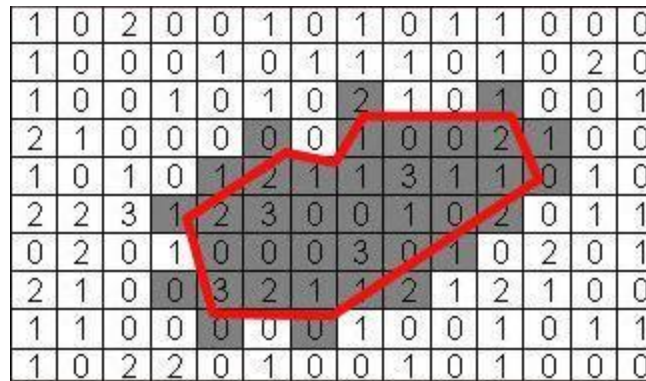


Ilustración 9: Vista superior del modelo de bloques. Anillo de restricción superficial.

1.3.1. Optimización del diseño de minas a cielo abierto mediante la integración de los métodos expuestos.

La aplicación de los métodos expuestos en esta investigación al diseño de minas a cielo abierto representa una mejora considerable al proceso. Algunas de estas mejoras que introducen estos métodos pueden enunciarse en estos planteamientos:

- Se obtiene un volumen de restricción que reduce la cantidad de operaciones de análisis sobre el modelo de bloques;
- Se aplican los ángulos de talud para cada sección del yacimiento;
- El diseño final de la mina se aproxima en gran medida al resultado óptimo físicamente.

En esta investigación no se integrarán en una solución la implementación de los algoritmos de creación de volúmenes de restricción y de diseño de minas a cielo abierto.

1.4. Análisis de estructuras de datos espaciales.

En la modelación de yacimientos mineros es necesario llevar un control exhaustivo del volumen de extracción de los minerales, para lo cual se emplean generalmente *estructuras de datos abstractas*³ que permiten guardar los datos geológicos de forma eficiente.

Existen diversas estructuras para mostrar cuerpos geométricos en 3 dimensiones, las más utilizadas son las mallas de triángulos y las mallas de tetraedros (Quezada, y otros, 2011) debido a las ventajas que ofrecen en cuanto a ahorro de memoria y facilidad de realizar muchas operaciones matemáticas sobre estos cuerpos.

Una malla de tetraedros **Ilustración 10** o Tetrahedral Network (TEN) (Pilouk, 2008), es una estructura espacial que, por sus características, permite modelar las estructuras geológicas en la rama de la geología y la minería, facilitando el cálculo del volumen del sólido y eliminando errores de inconsistencias que habitualmente tienen las mallas de triángulos para el cálculo de volumen.

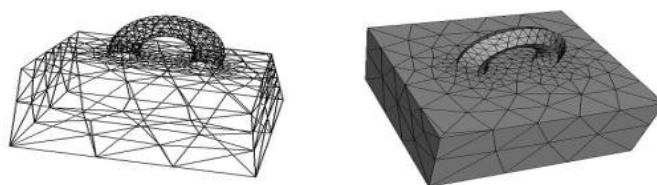


Ilustración 10: Objeto geométrico representado por una malla de tetraedros.

La representación de cuerpos geológicos en esta investigación se simplifica puesto que solo es necesario mostrar el modelo de bloques, y éste está compuesto solo por bloques (paralelepípedos) los cuales son relativamente sencillos de crear y visualizar en 3 dimensiones, además de que calcular el volumen de cada bloque así como de la totalidad del modelo es una sencilla operación matemática.

³ Tipo de contenedor de datos que permite realizar operaciones específicas sobre ítems almacenados que guardan relación entre sí.

Para disminuir los costos computacionales en operaciones de búsqueda y procesamiento de los datos espaciales se utilizan estructuras de datos espaciales jerárquicas (Keim, 1999). Según (Zachmann, y otros, 2006), existe un conjunto de estructuras de datos espaciales que permiten mejorar los procesos de búsqueda sobre las estructuras geológicas, tales como: R-Tree, BSP-Tree, Octree, Kd-Tree, entre otras.

Tanto el BSP-Tree (Binary Space Partitioning) como el Kd-Tree se basan en la subdivisión del plano en dos regiones construyendo un árbol binario. Esto requiere que sean definidos más niveles en el árbol de búsqueda lo que implica que el análisis desde la raíz hasta el elemento deseado sea más costoso con respecto al método propuesto por el Octree. Por otro lado, cada bloque del modelo representa un cubo que contiene información geológica. La estructura jerárquica que se adapta mejor a este problema es el Octree debido a que mediante la subdivisión recursiva proporciona cajas más ajustadas, por lo tanto es más fácil realizar operaciones de intersección y en general cualquier cálculo (Peña, 2012).

Como expusiera (Samet, 1990), en problemas de modelado de sólidos la principal estructura de datos espaciales (EDE) a seleccionar es el Octree, pues permite disminuir el tiempo de búsquedas espaciales en estructuras geológicas. Esta estructura de datos se almacena en un árbol y se basa en la subdivisión recursiva de cada nodo del árbol en octantes, dando como resultado que cada nodo tenga solo 8 hijos, como se muestra en la **Ilustración 11**.

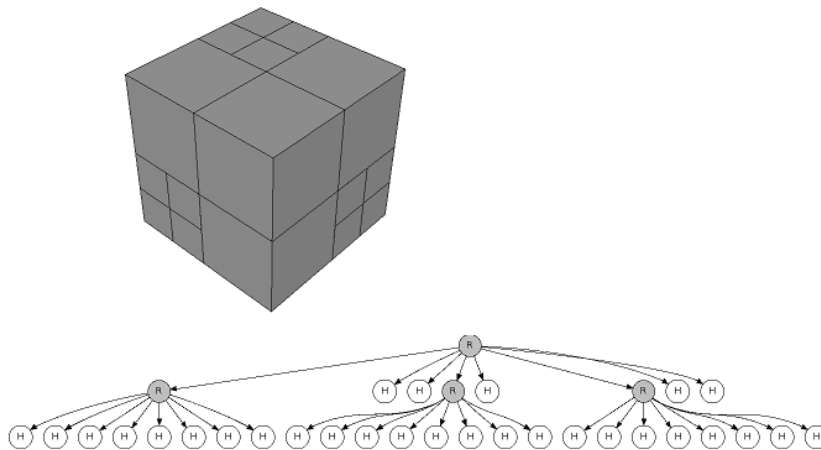


Ilustración 11: Representación de la jerarquía de nodos en un Octree.

1.4.1. Linear Octree: Índice espacial aplicado a estructuras geológicas.

En el presente trabajo se propone utilizar el Linear Octree como una estructura de datos espaciales para el almacenamiento de estructuras geológicas. Debido a que las estructuras que utilizan punteros en su implementación consumen gran cantidad de memoria, tales como la mayoría de los árboles anteriormente mencionados, en el problema analizado es más adecuado utilizar la variante Linear Octree por ser ésta más compacta y permitir la realización de las operaciones básicas de teoría de conjuntos, así como encontrar los nodos vecinos, con más facilidad que las demás.

La característica principal del Linear Octree es que indexa los datos en una estructura lineal. Las relaciones jerárquicas que en otro tipo de estructura deben ser especificadas de forma explícita (p.ej. en un árbol es necesario guardar la dirección del nodo padre y los nodos hijos) son obtenidas implícitamente en esta estructura, pues los elementos vecinos están almacenados con un índice que es en valor numérico el antecesor o el sucesor del elemento actual.

Para implementar esta investigación se propone utilizar una tabla Hash⁴ con el objetivo de guardar los datos y realizar búsquedas en el modelo de forma más eficiente. Este tipo de datos proporciona confiabilidad en las operaciones y una manera muy rápida de realizar búsquedas sobre los elementos que almacena.

1.5. Conclusiones parciales

Luego de realizada la presente investigación teórica se concluye lo siguiente:

- La eficiencia de los algoritmos empleados para optimizar el diseño de las minas a cielo abierto puede ser mejorada considerablemente si se reduce la cantidad de análisis a realizar al definir un volumen de restricción en el modelo de bloques geológicos.
- En el volumen de restricción creado se tienen en cuenta los ángulos de talud definidos durante los estudios geotécnicos en cada sección del yacimiento, lo que permite que la zona limitada por este

⁴ Hash: Estructura de datos lineal propia de QtCreator. Permite guardar un dato indexándolo con una llave.

volumen tenga un equilibrio óptimo entre rendimiento económico y seguridad al realizar la excavación y explotación de la mina.

- La estructura de datos abstracta que mejor se adecúa a los requerimientos de implementación es el Linear Octree, debido a su representación compacta de los extensos modelos geológicos empleados y su versatilidad al realizar operaciones de búsqueda, aspecto imprescindible en el desarrollo de esta investigación.

CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA

En este capítulo se describirán los métodos y algoritmos para definir y resolver el problema geométrico de crear un volumen de restricción en un modelo de bloques geológicos dado. La solución creada define este volumen con el objetivo de proveer a los especialistas mineros de una forma de reducir considerablemente el espacio de búsqueda dentro del modelo, lo que permite obtener de forma eficiente un modelo de entrada para los posteriores algoritmos de diseño de minas a cielo abierto.

2.1. Métodos de la geometría computacional.

La geometría computacional se ocupa del diseño y análisis de algoritmos para resolver problemas computacionales de tipo geométrico. Una definición más exacta plantea que:

La Geometría Computacional o geometría algorítmica trata de la conjunción de la Geometría Clásica con la Informática. Partiendo de la abstracción de problemas de otras áreas (tales como diseño asistido, robótica, CAD/CAM, bases de datos o incluso biología molecular), la Geometría Computacional trata de desarrollar herramientas y técnicas para resolver problemas de naturaleza principalmente geométrica, con especial énfasis en el diseño eficiente de algoritmos y estructuras de datos (Preparata, y otros, 1985).

En el presente trabajo fue necesario hacer uso de los enfoques de la geometría computacional, utilizando métodos tales como el de conocer si un punto yace dentro de un polígono, o representar y calcular mediante vectores los ángulos entre segmentos que se intersectan. La construcción de modelos tridimensionales usando estructuras de datos espaciales responde al hecho de que al manejarse una cantidad grande de datos en cada caso, es necesario usar estructuras eficientes para representarlos.

2.2. Propiedades matemáticas empleadas.

Para solucionar la problemática de esta investigación se utilizaron varios procedimientos del álgebra y la geometría euclidiana. Estos métodos permiten abordar un problema de la vida real desde una perspectiva matemática que garantiza la confiabilidad y exactitud de los resultados, pues se encuentran basados en propiedades y axiomas válidos en todo momento. A continuación se realiza una breve descripción de algunas de las propiedades con las cuales se trabajó.

2.2.1. Elementos de geometría euclidiana. Propiedades utilizadas.

Un sistema de ejes coordenados rectangulares en el espacio R^3 consta de tres ejes perpendiculares dos a dos (denominados ejes coordenados) con el mismo origen (**Ilustración 12**).

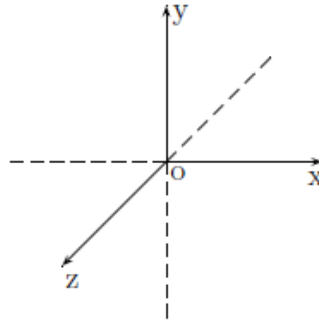


Ilustración 12: Sistema de ejes coordenados rectangulares. Elaboración propia.

Cada par de ejes determina un plano que se denomina plano coordenado. Sea O el origen y OX, OY, OZ los ejes coordenados, entonces los planos coordenados se denotan:

XY el que determinan OX y OY.

YZ el que determinan OY y OZ.

ZX el que determinan OZ y OX.

El sistema se denota: XYZ, o bien: OXYZ (Anton, 1997). Este es el método estándar y en la solución del problema los ejes coordenados son modelados de esta forma.

Vectores. Producto escalar de vectores. Ángulo entre segmentos que se intersectan.

Sea E el conjunto de todos los puntos del espacio. Se denomina vector a todo par ordenado de elementos de E. Si A y B son dos puntos del espacio, la notación (A, B) designa un vector. Se tiene además que (A, B) determina un segmento dirigido con origen en A y extremo en B, denotado por AB. En caso que A y B

coincidan, el vector que determinan se llamará vector nulo y se denotará \mathbf{o} . Un vector geométrico es básicamente una clase de equivalencia de segmentos orientados.

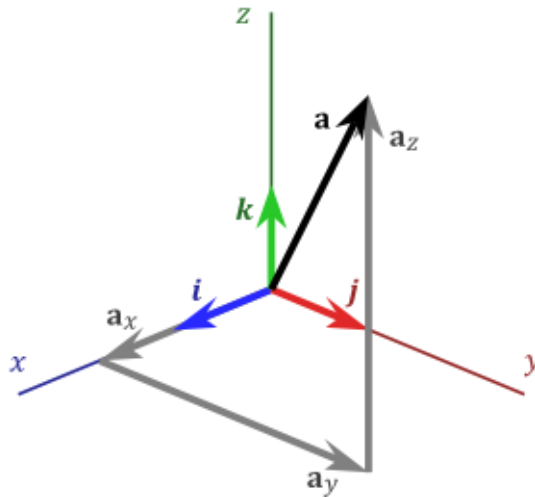


Ilustración 13: Vector \mathbf{a} con cada una de sus componentes (a_x, a_y, a_z) en el espacio \mathbb{R}^3 .

Los vectores cumplen las propiedades básicas de suma, resta, multiplicación y división, entre otras. Estas operaciones entre vectores tienen propiedades físicas especiales, las cuales son aprovechadas en la resolución de problemas de toda índole por la facilidad con que pueden ser aplicadas. Entre estas propiedades está la definida como producto escalar de vectores, también conocida como producto interior, la cual permite obtener el ángulo que existe entre dos segmentos que se intersectan en el espacio, aplicando un despeje en la fórmula (Anton, 1997).

Sean \mathbf{v} y \mathbf{w} dos vectores de \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 representados por dos segmentos orientados \mathbf{AB} y \mathbf{AC} (teniendo estos dos segmentos el mismo punto inicial o de aplicación).

El producto escalar de $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1; w_2; w_3)$ se define como:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Teniendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{w} es el ángulo α determinado por \mathbf{AB} y \mathbf{AC} , que satisface la condición: $0 \leq \alpha \leq \pi$.

$\cos(\alpha) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) / (\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|)$, por tanto, se tiene que:

$$\alpha = \arccos [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) / (\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|)]$$

Teniendo $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum(v_i^2)}$.

Por tanto, puede obtenerse el ángulo α entre dos segmentos en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3 como el resultado del cálculo del arco coseno del producto escalar entre vectores entre la multiplicación de sus normas. Este método es fundamental para calcular el ángulo de acimut de un punto dado en el modelo.

2.2.2. Definición de polígonos.

Un polígono puede ser fácilmente comprendido como un conjunto arbitrario de puntos en el plano que se unen mediante líneas formando un contorno cerrado. Una definición más exacta expresa que:

Un polígono (específicamente un n -gono para $n \geq 3$) es una secuencia cíclica ordenada de puntos V_1, V_2, \dots, V_i (los vértices del polígono) seleccionados arbitrariamente, de conjunto con segmentos E_i determinados por pares de vértices V_i, V_{i+1} adyacentes en el orden cíclico (los lados del polígono). Cada vértice V_i se dice que es incidente con los lados E_{i-1} y E_i , y solo con ellos (Grumbaum, 2003).

Polígonos complejos

Estos polígonos tienen los lados de longitudes arbitrarias, y existe al menos una intersección entre uno de estos lados con otro lado o con otro vértice. En la mayoría de los problemas de geometría computacional, estos polígonos son descompuestos en polígonos simples para facilitar el trabajo.

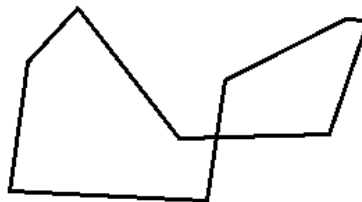


Ilustración 14: Polígono complejo. Existe al menos una intersección entre sus lados. (Elaboración propia).

Polígonos simples

Estos polígonos no presentan intersección entre ninguno de sus lados. Pueden clasificarse en dos tipos, regulares e irregulares, atendiendo a su geometría.

Simples regulares

Tienen todos sus lados y sus ángulos interiores iguales, por lo que se les puede definir un punto central (ejemplo: pentágono, hexágono).

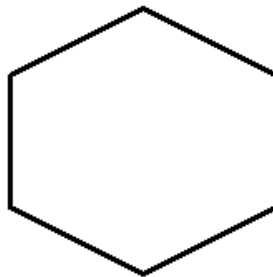


Ilustración 15: Polígono simple y regular. (Elaboración propia).

Simples irregulares convexos

Sus lados tienen longitudes arbitrarias, sus ángulos tienen valores diferentes en dependencia de la geometría de sus lados; todos los ángulos interiores son menores que π .

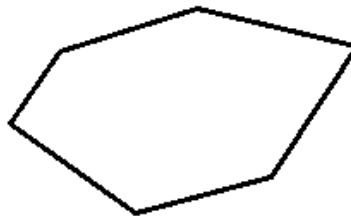


Ilustración 16: Polígono simple, irregular y convexo. No existe intersección de lados, todos los ángulos interiores son menores que π . (Elaboración propia).

Simples irregulares cóncavos

Sus lados tienen longitudes arbitrarias, sus ángulos tienen valores diferentes en dependencia de la geometría de sus lados; existe al menos un ángulo interior cuyo valor es mayor que π .

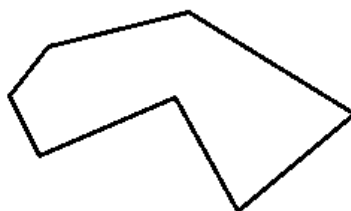


Ilustración 17: Polígono simple, irregular y cóncavo. No existe intersección de lados, hay al menos un ángulo interior mayor que π . (Elaboración propia).

En esta investigación se trabajará solamente con polígonos simples, puesto que un polígono complejo (figura cuyos lados se cruzan sobre sí mismos) no tiene sentido físico en la representación de un contorno de una superficie en un modelo de bloques geológicos.

Expansión de polígonos respecto a un centroide.

Los polígonos que definen la geometría del volumen buscado se expanden siguiendo sencillas propiedades trigonométricas. Las operaciones se realizan sobre el polígono base, el cual nunca es modificado, sino que se utiliza para calcular los polígonos que se formarán en cada nivel o banco luego de la expansión y traslación de los valores correspondientes de la figura base. Para cada punto del polígono base se encuentra la relación de proporción que será el factor de expansión, el cual está dado por el cociente de la distancia existente entre el centroide del polígono base y el punto actual en el polígono base y la distancia entre el centroide y el punto en el polígono luego de ser escalado. Esta relación se obtiene tomando como parámetros la altura de banco y el ángulo de talud definido para la sección acimutal en la cual se encuentre el punto analizado (Ver 2.6.1).

En la **Ilustración 18** se muestra la expansión de un polígono en cinco niveles de un modelo de bloques, teniendo en cuenta los ángulos de talud definidos. En este caso se ha representado un polígono resultado de la interpolación de un octágono. Los polígonos se trabajan como figuras planas, y solo se tiene en

cuenta su coordenada z para aumentar el nivel o banco en el cual se está realizando el cálculo, desde cero para representar el fondo, hasta el nivel máximo que representa la superficie del terreno.

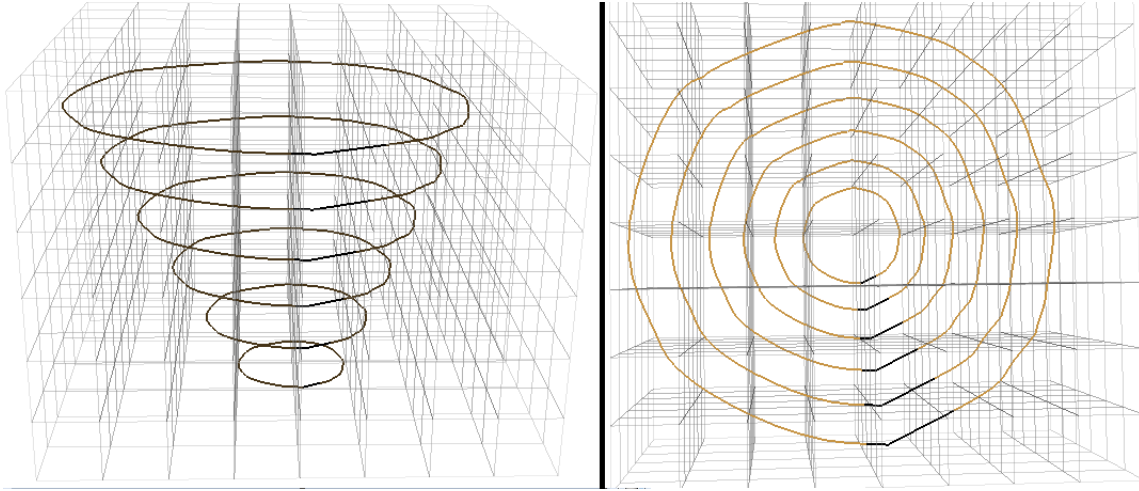


Ilustración 18: Expansión de un polígono respecto a su centroide. Vista lateral (izquierda), vista superior (derecha).

2.2.3. Interpolación de puntos. Splines.

La interpolación de puntos es un recurso matemático que permite inferir valores aproximados en cierto dominio a partir de un conjunto de datos, haciendo uso de funciones por partes definidas por polinomios de grado k . Este trabajo hace uso de estas funciones para ciertos cálculos, por lo que a continuación se describe brevemente su base matemática.

Los problemas de interpolación por polinomios están planteados de esta forma:

Dados $n + 1$ pares (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , siendo todos los x_i distintos, y $y_i = f(x_i)$ para alguna función f , encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (Trefethen, 2008).

El uso de interpolación de puntos en esta solución es necesario pues se conocen de entrada solo un conjunto de puntos, los cuales no son suficientes para realizar los cálculos con una precisión alta. En el proceso de calcular los límites geométricos buscados se realizan operaciones que requieren interpolación, con el fin de hacer un trazado de curvas que permita definir la geometría del volumen de restricción.

La interpolación por polinomios presenta varios problemas para llegar a soluciones exactas. Cuando el número de nodos de interpolación aumenta, la complejidad temporal de las operaciones realizadas se torna muy alta, y en segundo lugar, el error de interpolación se incrementa al aumentar el grado del polinomio interpolador.

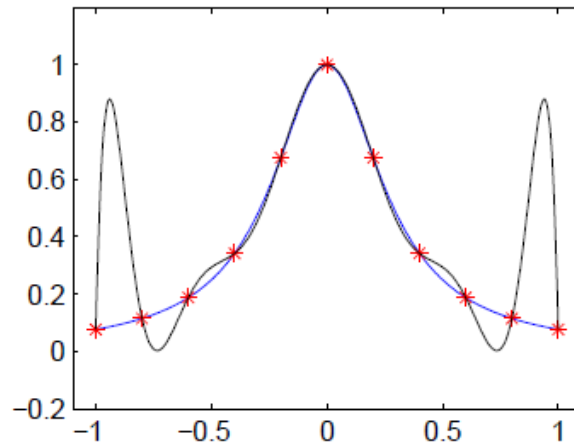


Ilustración 19: Gráfico de la función $f(x) = 1 / (1 + 12x^2)$ y de su polinomio de interpolación con 11 nodos igualmente espaciados en el intervalo $[-1, 1]$. Error de interpolación. (Imagen tomada del curso Matemática Numérica en el EVA).

Como puede verse en la **Ilustración 19**, al tener una cantidad grande de nodos de interpolación, las oscilaciones de los valores del polinomio, sobre todo en los extremos, hacen que el error de interpolación sea excesivo (Fenómeno de Error de Runge (Dahlquist, y otros, 1974)). Por tanto, para realizar interpolación de puntos se utilizarán splines, los cuales proveen suavidad a las curvas creadas y error de interpolación casi nulo en todo el dominio sobre el cual se interpola.

Spline

La interpolación por splines es la más aceptada en el entorno de sistemas que necesitan alta precisión, pues proveen una aproximación muy acertada para calcular la posición de puntos. Este tipo de interpolación genera *curvas suaves*, las cuales pueden definirse como:

Una curva $\gamma:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave si y solo si la derivada $\gamma'(t)$ existe, es continua y además $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a,b]$ (Barsky, 1989).

Entre los diferentes tipos de splines existentes, el que mejor se adapta a las necesidades de este trabajo es el spline de Kochanek-Bartels, o TCB-Spline (Kochanek, y otros, 1984), debido al control que proporciona en cuanto a continuidad, tensión y parcialidad de la curva en los puntos o nodos de interpolación.

La diferencia entre usar alguno de los métodos de interpolación está dada por la naturaleza del problema. Al definir un polígono base sobre el cual construir un volumen de restricción, se hace necesario mantener la geometría del sistema sin cambios bruscos; para suavizar las curvas no se puede emplear un método que distorsione esta topología introduciendo curvas demasiado suaves o demasiado agudas (esta diferencia está dada por el manejo de los valores de las derivadas de la curva en los nodos de interpolación). Por tanto, se justificó su uso al ser este tipo de spline el que más control proporciona sobre la curva generada.

El control que ejercen estos parámetros sobre la curva creada puede verse claramente en la **Ilustración 20**.

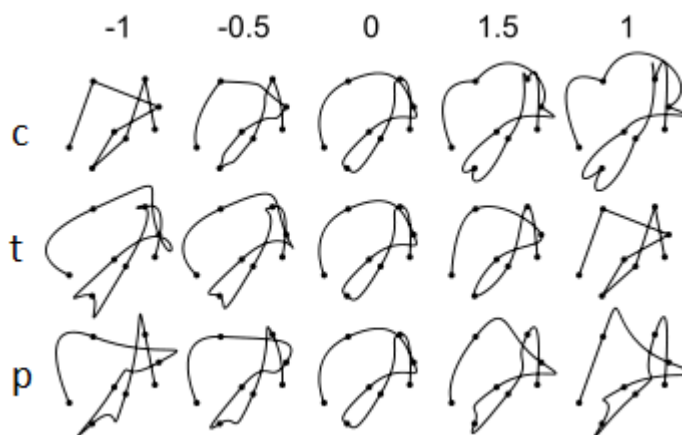


Ilustración 20: Splines de Kochanek-Bartels. Parámetros de control de la curva.

Los parámetros **c**, **t** y **p** tienen valores que oscilan entre -1 y 1, y se establecen una vez que se ha creado el spline. El parámetro de tensión, **t**, cambia la longitud del vector tangente. El parámetro de sesgo o parcialidad, **p**, principalmente cambia la dirección del vector tangente. El parámetro de continuidad, **c**, cambia la agudeza en el cambio entre las tangentes.

Al tener definido un spline sobre un conjunto de puntos, se puede obtener cualquier cantidad de puntos sobre esta función, con un margen de error de interpolación muy pequeño (Catmull, y otros, 1974). En esta investigación se le denominan *puntos de salida* a los puntos obtenidos sobre la función spline interpoladora del polígono base.

La utilidad de los splines en esta solución está dada por la mayor precisión que introducen en los resultados y su capacidad de convertir en curvas suaves a los polígonos que sirven como base.

2.2.4. Punto dentro de un polígono.

El método para conocer si un punto dado se encuentra dentro de los límites geométricos definidos por un polígono es un problema clásico en geometría computacional, y se usa en todas las aplicaciones que manejan información gráfica. Hay varias maneras de resolver este problema, algunas sencillas, pero que pueden presentar algunos casos de error, y algunas completamente validadas pero de mayor complejidad (p.ej. método de barrido del plano o *Plane Sweep* (Shamos, y otros, 1976)).

El algoritmo usado en esta investigación busca intersecciones de rayos con los segmentos del polígono (disparo de rayos o *ray cast*). Básicamente el algoritmo funciona trazando desde el punto una semirrecta hasta el infinito (las horizontales o verticales) y se calcula el número de segmentos del polígono que corta. Si es impar, el punto está dentro. Si es par, está fuera.

Matemáticamente: La ecuación de una línea recta es $y = mx + n$. La pendiente es $m = \Delta y / \Delta x$. Se procede a insertar la coordenada x del punto en la ecuación. Si el resultado es más grande que la coordenada y el rayo no intersecta el segmento de línea. Se verifica en cada segmento de línea (**Ilustración 21**).

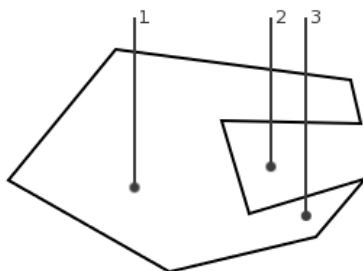


Ilustración 21: Algoritmo para determinar si un punto yace dentro de un polígono.

2.3. Ángulos de talud según acimuts.

Los ángulos de talud considerados en la solución del problema están representados por las ocho direcciones acimutales principales (N, NE, E, SE, S, SW, W, NW) y el correspondiente valor del ángulo para esa dirección en el modelo de bloques. Estos parámetros deben ser definidos con la mayor precisión posible, debido a que garantizan la estabilidad geotécnica de la futura explotación. Los ángulos de talud deben proveer un equilibrio óptimo para la inclinación de las paredes, pues podría extraerse gran cantidad de material estéril, o dejar de extraerse mineral valioso.

En la resolución del problema planteado, en cada región acimutal se establece un ángulo de talud global.

La **Ilustración 22** muestra una vista superior del modelo de bloques (hipotético) en la cual se representan los acimuts que se tienen en cuenta para definir los ángulos de talud en cada sector del volumen de restricción que se desea crear.

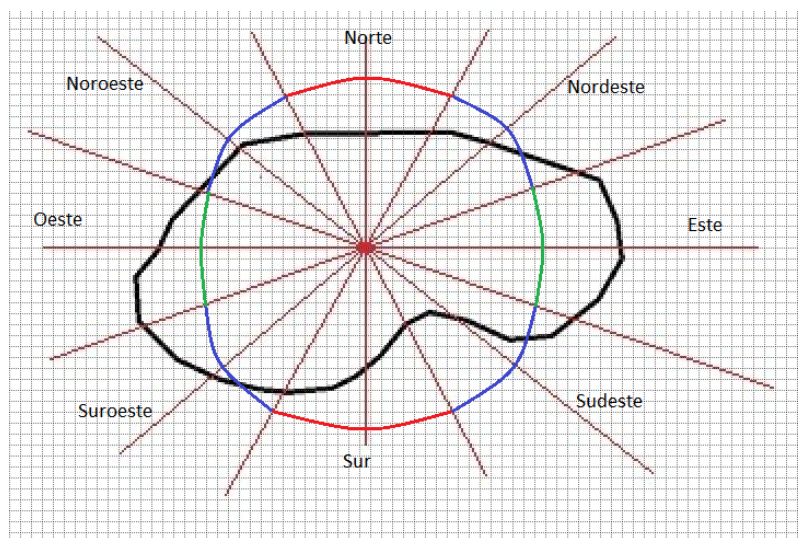


Ilustración 22: Modelo de bloques (vista superior), con sectores definidos según acimuts, para definir ángulos de talud en éstos.

Los ángulos de talud en este problema son entrados al programa por el usuario de forma gráfica, mediante una ventana en la cual se brinda la funcionalidad de escoger para cada una de las 8 direcciones

acimutales el respectivo ángulo de talud que deberá tener esa sección en el modelo para la construcción del volumen de restricción.

2.4. Índices y coordenadas en un modelo de bloques geológicos.

La herramienta creada para validar el algoritmo está orientada a brindar un balance en el consumo de recursos de hardware, para lo cual se utiliza la estructura QHash para almacenar el modelo de bloques. Esta estructura indexa un dato con una llave, a modo de arreglo lineal; en este caso el dato es un bloque y la llave es la dirección de cada bloque, atributo especificado por los valores i, j, k , siendo i, j, k los índices de cada bloque en cada dimensión del modelo.

Esto se expone más claramente teniendo en cuenta que el modelo de bloques geológicos sobre el cual se aplicarán los algoritmos consta de $I * J * K$ bloques, cuyos índices son números enteros en el rango $0 \rightarrow I, 0 \rightarrow J, 0 \rightarrow K$. Para posicionarse en un bloque específico dada su coordenada geométrica, es necesario realizar una sencilla operación (la misma en cada dimensión I, J, K):

$$\text{índice}_i \leftarrow (\text{coordenada}_x_{\text{punto_actual}} - \text{coordenada}_x_{\text{origen}}) / \text{dimensión_bloque_en_eje}_x$$

2.5. Características del algoritmo creado.

La creación de volúmenes de restricción parte de un componente puramente geométrico: el diseño de la mina debe respetar una geometría definida. Los algoritmos de optimización de diseño pueden encontrar la secuencia de extracción óptima, pero en todos los casos es muy costoso computacionalmente determinar este resultado debido a la extensión de los modelos sobre los cuales se realizan las operaciones.

Para definir un volumen de restricción que permita optimizar las operaciones de diseño de minas a cielo abierto es necesario tener en cuenta algunas cuestiones básicas. En los principales sistemas informáticos mundialmente usados, el diseño de minas se realiza usando el método de Lerchs-Grossman (1.2.2).

A continuación se describirá la forma de crear un volumen de restricción a partir de los ángulos de talud y un conjunto de puntos entrados al programa por el usuario (ya sea de forma gráfica o leídos en un fichero), los cuales forman un polígono simple (2.2.2) que representa la base dentro del modelo de

bloques a partir de la cual comenzar la construcción del volumen de restricción por niveles, similarmente a como funcionan los algoritmos de diseño de minas a cielo abierto.

Algoritmo para hallar volumen de restricción.

Hay varias condiciones geométricas y geológicas a tener en cuenta. El **Norte** se define como el valor en dirección del eje **Y** en sentido positivo que se encuentra ubicado en el punto medio en el eje **X** relativo al volumen que se quiere buscar, esto es siempre así puesto que en todos los sistemas informáticos dedicados a la geología y la minería se asume que el eje coordenado **Y** representa la dirección **Norte**, el eje coordenado **X** representa la dirección **Este**, y el eje coordenado **Z** representa la elevación de un punto, en sentido positivo siempre. Este valor es importante pues a partir de él se calcula el acimut (**Ilustración 22**), en sentido horario, de cada sección del polígono, para definir el factor de escalado y con este los ángulos de talud global.

Luego de tener los **n** puntos que son los vértices del polígono base que servirá como entrada del algoritmo, se aplica (opcionalmente) una interpolación mediante splines para obtener mayor cantidad de puntos (puntos que están en el mismo contorno definido por el polígono base) sobre los cuales aplicar con más efectividad el algoritmo. Este método permite obtener con facilidad y exactitud una base sobre la cual comenzar la construcción en cada nivel.

El cálculo de los ángulos de acimut se realiza utilizando 3 puntos que definen dos segmentos: el primer punto es el definido como **Norte**, el segundo es el centroide del polígono y el tercero es el punto del polígono que se está analizando (2.6.2).

Al tener definido un ángulo de talud diferente para cada una de las secciones acimutales, es necesario tratar independientemente cada punto que forma el contorno, por tanto, se utiliza una estructura condicional para calcular el factor de expansión del polígono base requerido en cada sección.

Luego de obtener un polígono expandido por cada nivel, se procede a buscar en el modelo de bloques, según las coordenadas de cada bloque, aquellos bloques que están dentro de estos polígonos, los cuales conformarán la salida del algoritmo.

Básicamente los pasos del algoritmo son los siguientes:

- A partir del polígono base (sobre el cual puede o no haberse aplicado una interpolación)
- Comenzar a iterar, en cada paso comprobar el acimut del punto actual del polígono que se esté analizando.
- Calcular el factor de expansión de acuerdo a la región acimutal en la que se encuentre.
- Expandir el polígono punto a punto, al momento de analizar su región acimutal.
- Después de construir el polígono en el nivel actual, hacer una llamada al método que selecciona los bloques que están dentro de los límites determinados por ese polígono; marcarlos para su identificación.
- Al llegar a la superficie, seleccionar los bloques que han sido marcados; esos formarán el volumen de restricción.

La **Ilustración 23** muestra una imagen de la aplicación desarrollada, graficando los polígonos por niveles que definen el volumen de restricción.

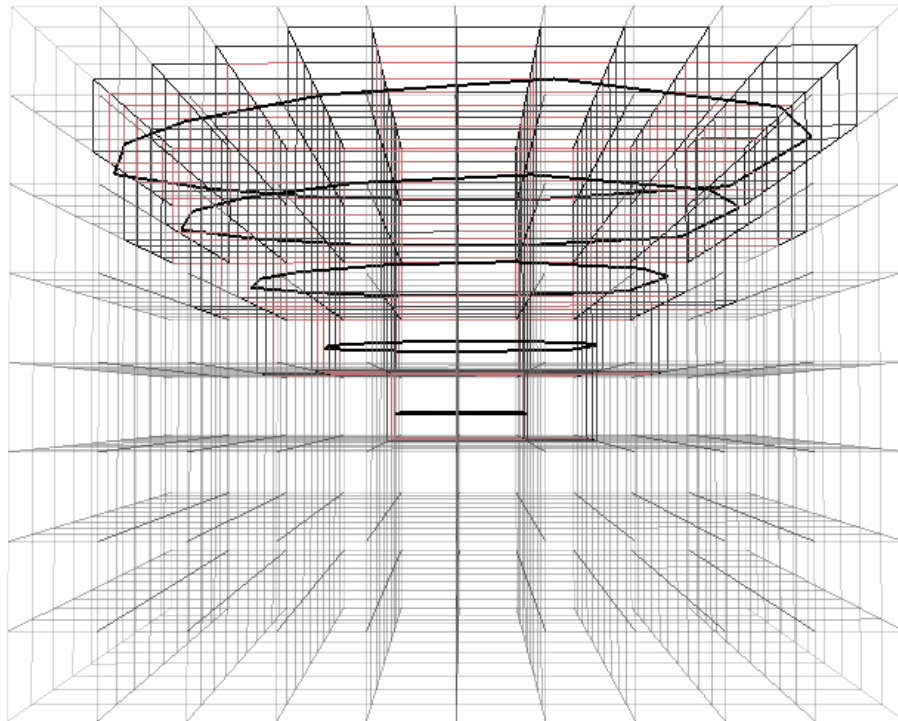


Ilustración 23: Polígonos definidos por niveles. (Vista de la herramienta).

2.6. Descripción en pseudocódigo de los principales algoritmos.

En este acápite se describen los principales métodos creados para darle solución al problema. Estos algoritmos están basados fundamentalmente en el álgebra y en la geometría euclidiana.

2.6.1. Calcular factor de escalado.

Para realizar las transformaciones que permiten construir el volumen de restricción a partir de un polígono base es necesario calcular un factor que permita escalar los puntos de este polígono base para definir los restantes polígonos o anillos por niveles.

Procedimiento FactorEscalaSegunRegionAcimutal ()

Inicialización

step ← altura de cada nivel o banco

level ← nivel o banco actual

distancia ← distancia desde el centroide del polígono hasta el punto actual en el polígono base

taludes ← estructura que almacena los diferentes taludes definidos por el usuario en cada una de las 8 direcciones (p.ej. taludes[“NE”] == 43°)

begin

acimut_punto_actual ← región acimutal en la que se encuentra el punto actual, en sentido horario

factor_escalado ← $1 + (\text{step} * \text{level} * \text{Tan}(90 - \text{taludes}[\text{acimut_punto_actual}]))) / \text{distancia}$

end

2.6.2. Calcular ángulo entre segmentos que se intersectan.

Este método permite calcular el acimut de un punto en el contorno del polígono que define la superficie sobre la cual construir el volumen de restricción, para aplicarle el escalado de acuerdo al ángulo de talud definido para esa sección. Utilizando la propiedad de producto escalar entre vectores, se obtiene el ángulo existente entre dos segmentos que se interceptan, los cuales están definidos por 3 puntos: un punto pivote que es la intersección entre los dos segmentos y sendos puntos que definen los extremos de cada segmento. Este método se implementó a partir del estudio de las propiedades del producto escalar de vectores (Anton, 1997).

Procedimiento AnguloEntreSegmentos (segment1_point1, segment1_point2, segment2_point2)

Inicialización

angulo \leftarrow 0

begin

if(segment1_point1.x == segment1_point2.x **AND** segment1_point1.y == segment1_point2.y) **then**

begin

if(segment1_point1.z == segment1_point2.z) **then**

begin

 return 0.0

endif

else return 90.0

endif

vector1 \leftarrow segment1_point1 - segment1_point2;

vector2 \leftarrow segment2_point2 - segment1_point2;

valor1 \leftarrow vector1.x * vector2.x + vector1.y * vector2.y + vector1.z * vector2.z

valor2 \leftarrow vector1.x * vector1.x + vector1.y * vector1.y + vector1.z * vector1.z

valor3 \leftarrow vector2.x * vector2.x + vector2.y * vector2.y + vector2.z * vector2.z

angulo \leftarrow arco coseno(valor1 / sqrt(valor2 * valor3)) * (180.0 / 3.141592);

if(segment1_point1.z == segment1_point2.z **AND** segment1_point2.z == segment2_point2.z) **then**

begin

if(segment2_point2.x \geq segment1_point2.x) **then**

begin

return angulo

endif

else return 360.0 – angulo

endif

else return angulo

end

2.6.3. Crear volumen de restricción.

Este es el principal algoritmo de este trabajo. Al terminar su ejecución se habrá obtenido el resultado en forma de un volumen de restricción aplicado en un modelo de bloques, a modo de límites geométricos en un espacio definido.

Procedimiento HallarVolumenDeRestriccion(poligono_base)

Inicialización

$n \leftarrow \text{poligono_base.size}$

$\text{max_nivel} \leftarrow \text{coordenada máxima en el eje Z}$

$\text{min_nivel} \leftarrow \text{coordenada en el eje Z donde se ha definido el polígono base}$

$\text{centro} \leftarrow \text{centroide del polígono base}$

$\text{radio} \leftarrow \text{radio de la circunferencia circunscrita al polígono}$

$\text{norte} \leftarrow \text{punto de referencia que indica el norte}$

$\text{angulos_talud} \leftarrow \text{lista con los ángulos de talud global definidos por el usuario en las 8 direcciones acimutales}$

$\text{banco} \leftarrow \text{dimensión de cada bloque en la dirección del eje Z (altura de banco)}$

$\text{nuevo_poligono} \leftarrow \text{polígono que irá guardando temporalmente los nuevos polígonos construidos en cada nivel}$

begin

for level $\leftarrow 0$ to $(\text{max_nivel} - \text{min_nivel}) / \text{banco}$ **step 1 do**

begin

for l $\leftarrow 0$ to n **step 1 do**

begin

$x \leftarrow \text{poligono_base}[i].x$

$y \leftarrow \text{poligono_base}[i].y$

$z \leftarrow \text{poligono_base}[i].z$

$\text{acimut} \leftarrow \text{AnguloEntreSegmentos}(\text{Norte}, \text{centro}, (x, y, z))$

$\text{factor_escala} \leftarrow \text{FactorEscalaSegunRegionAcimutal}(\text{acimut})$

$x_escalada \leftarrow \text{centro}.x + (x - \text{centro}.x) * \text{factor_escala}$

$y_escalada \leftarrow \text{centro}.y + (y - \text{centro}.y) * \text{factor_escala}$

$z_escalada \leftarrow z + \text{banco} * \text{level}$

$\text{nuevo_poligono}.AdicionarPunto(x, y, z)$

end

HallarBloquesDentroDePoligonoEnNivel (nuevo_poligono)

nuevo_poligono.BorrarTodosLosPuntos()

end

2.6.4. Hallar bloques dentro de polígonos.

Con este algoritmo se pueden conocer en determinado plano los bloques que están dentro de un polígono, utilizando el criterio de que se consideran dentro si tienen al menos un punto de intersección con el polígono. Esto se hace utilizando el método para saber si un punto está dentro de un polígono, con lo que se obtiene como resultado la geometría base en cada nivel o banco.

Este método se emplea con el fin de obtener el conjunto solución del algoritmo, el cual está conformado por todos los bloques del modelo que estén dentro de los límites geométricos definidos.

Procedimiento HallarBloquesDentroDePoligonoEnNivel (poligono)

Inicialización

bloques ← ModeloDeBloques.ObtenerBloques() // todos los bloques del modelo

limites ← **ObtenerLimites**(poligono) //obtener x_min, x_max, y_min, y_max, para //restringir la búsqueda

coord_origen ← ModeloDeBloques.CoordenadaOrigen() // punto origen

dimension_bloque ← ModeloDeBloques.DimensionBloque() // vector dimensiones

n ← poligono.length

i_inicial ← (limites[0] – coord_origen.x) / dimension_bloque.x

i_final ← (limites[1] - coord_origen.x) / dimension_bloque.x

j_inicial ← (limites[2] – coord._origen.y) / dimensión_bloque.y

j_final← (limites[3] - coord._origen.y) / dimensión_bloque.y

k ← poligono[0].z

begin

if (n > 2) **then**

begin

for i ← i_inicial **to** i_final **step** 1 **do**

begin

```
for j ← j_inicial to j_final step 1 do
  begin
    BlockAddress ba(i,j,k)
    if (bloques.ExisteDireccion(ba)) then
      begin
        if(PuntoDentroDePoligono(bloques[ba].x, bloques[ba].y, poligono)) then
          begin
            bloques[ba].Select()
          endif
        endif
      end
    end
  end
end
end
```

2.7. Conclusiones parciales

La utilización de splines para obtener una mayor cantidad de puntos iniciales sobre los cuales realizar las operaciones permite aumentar la precisión de los algoritmos y eliminar formas agudas y poco realistas de los contornos obtenidos, aproximando el resultado a la realidad, con un costo adicional insignificante en cuanto a tiempo de ejecución y utilización de espacio de memoria.

La forma de expandir el polígono base para construir los anillos de restricción en cada nivel o banco satisface la condición de respetar los ángulos de talud global en cada dirección y mantener la geometría del modelo, puesto que se realiza mediante una ecuación trigonométrica cuya validez está comprobada (tangente de un ángulo).

Los algoritmos diseñados tienen una complejidad temporal lineal, y tienen la ventaja de no tener que recorrer todo el espacio de búsqueda del modelo, lo que representa una optimización considerable para la posterior aplicación sobre el modelo de los algoritmos de diseño de minas a cielo abierto.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo se exponen los resultados de aplicar las técnicas creadas con el fin de mostrar la efectividad de éstas. Para realizar las pruebas se utilizaron modelos de gran extensión, los cuales permitieron medir el desempeño de los algoritmos en condiciones equivalentes a como se utilizan las aplicaciones reales.

3.1. Consideraciones generales.

La herramienta creada para validar los algoritmos está orientada a brindar un balance en el consumo de recursos de hardware, para lo cual se utiliza la estructura QHash para almacenar el modelo de bloques. Esta estructura es muy eficiente al realizar operaciones de búsqueda y está validada internacionalmente, con lo cual se asegura la confiabilidad en la aplicación.

Las pruebas fueron realizadas en una estación de trabajo (Laptop) con las siguientes características:

- Sistema operativo: Ubuntu 12.04 LTS 32-bits
- Memoria RAM: 2 GB
- Procesador: Intel Celeron B-800 2da generación @1.50 GHz
- Tarjeta gráfica: -

Las mediciones de tiempos de ejecución se realizaron utilizando QElapsedTimer, una clase propia del entorno de trabajo (*framework*) Qt que permite obtener el tiempo transcurrido en la ejecución de una función.

El modelo de bloques geológicos se construye y se carga en memoria en su totalidad, con el fin de probar los algoritmos sin tener en cuenta el tiempo consumido por las operaciones de acceso a bases de datos o ficheros.

El polígono base que se utiliza en cada prueba se introduce al programa de forma sencilla, cargando un fichero con los puntos que lo conforman (excepto en el caso 3.3, en el cual los polígonos base se generan aleatoriamente).

3.2. Datos de prueba. Validación del uso de interpolación.

La interpolación aporta la facilidad de reducir a priori la rectitud o agudeza de las formas obtenidas como resultado de los algoritmos. Los resultados de su uso pueden evaluarse dependiendo del nivel de precisión que se desee; si el polígono base entrado por el usuario consta de la suficiente cantidad de puntos, dependiendo del modelo, no se hace necesario su uso.

Para medir la efectividad de usar interpolación en la resolución del problema se realizó un caso de estudio en el cual se hicieron 6 corridas de la aplicación, construyendo el volumen de restricción a partir de un polígono base formado por 8 puntos. Se utilizaron ángulos de talud iguales en todas direcciones (primero 30 grados, luego 45 y luego 60 grados, las primeras 3 veces sin interpolación, las restantes 3 usando interpolación con una salida de 100 puntos y usando los mismos ángulos).

Modelo de bloques empleado: dimensiones 50x50x40, 100000 bloques en total.

Sin interpolación	1ra corrida	2da corrida	3ra corrida
Talud	30°	45°	60°
Bloques dentro	24597	12497	6717
Tiempo (ms)	16063	10074	5236

Usando una interpolación sobre el polígono base formado por 8 puntos, con una salida de 100 puntos (2.2.3), los cuales fueron empleados para realizar las operaciones.

Con interpolación	1ra corrida	2da corrida	3ra corrida
Talud	30°	45°	60°
Bloques dentro	28195	14702	7776
Tiempo (ms)	17506	11469	5906

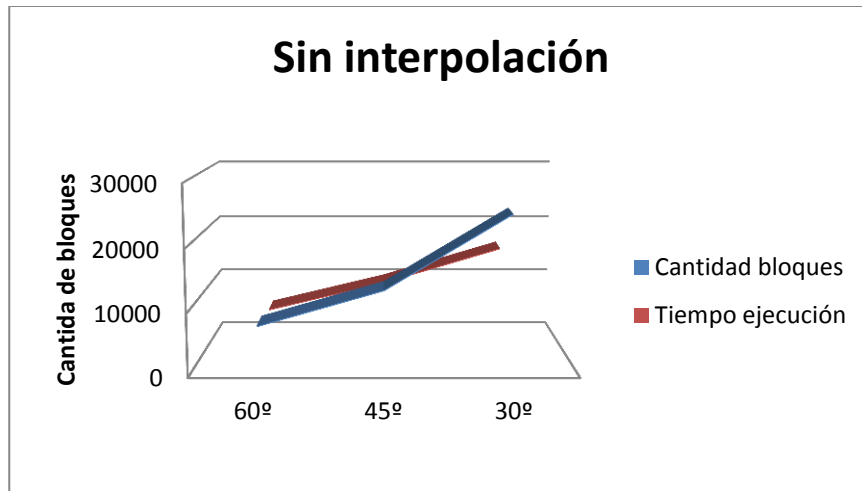


Ilustración 24: Resultados sin usar interpolación.

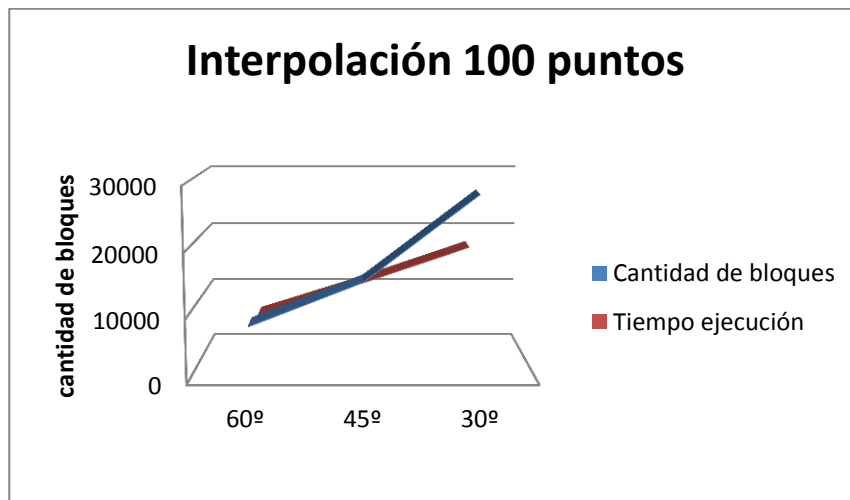


Ilustración 25: Validación de resultados usando interpolación.

Los datos muestran que la diferencia es mínima en cuanto a tiempo de ejecución, sin embargo, se obtiene un volumen más preciso al usar interpolación sobre el polígono base, pues permite obtener un polígono constituido por 100 puntos los cuales forman una figura más aproximada a la realidad. Como resultado de tener mayor cantidad de puntos sobre los cuales hacer los cálculos, también se tiene una mayor confiabilidad al calcular intersecciones, pues hay menor probabilidad de errores.

3.3. Datos de prueba. Algoritmo usando polígonos base generados aleatoriamente.

El modelo de bloques definido para realizar la prueba tiene 55x65x42 bloques, 150150 bloques en total, teniendo cada bloque una dimensión de 10x10x10 unidades, lo cual constituye un modelo medianamente grande. Se definió un ángulo de talud de 45 grados en las 8 direcciones acimutales y se usó interpolación con salida de 100 puntos (2.2.3) para cada polígono generado.

La construcción del modelo de bloques tomó un tiempo promedio de 18400 ms, y el consumo de memoria fue de 33892 KB.

Los resultados son los siguientes:

Cantidad bloques seleccionados	Tiempo de ejecución
17131	15697
5353	4763
22424	16901
13731	15600
21698	21029
9064	6969
11208	9167
60639	37604
349	507
10834	8828

Luego de ordenar los datos y graficarlos se puede comprobar en la **Ilustración 26** que los tiempos de ejecución del algoritmo siguen una tendencia lineal, lo cual demuestra la efectividad de éste.

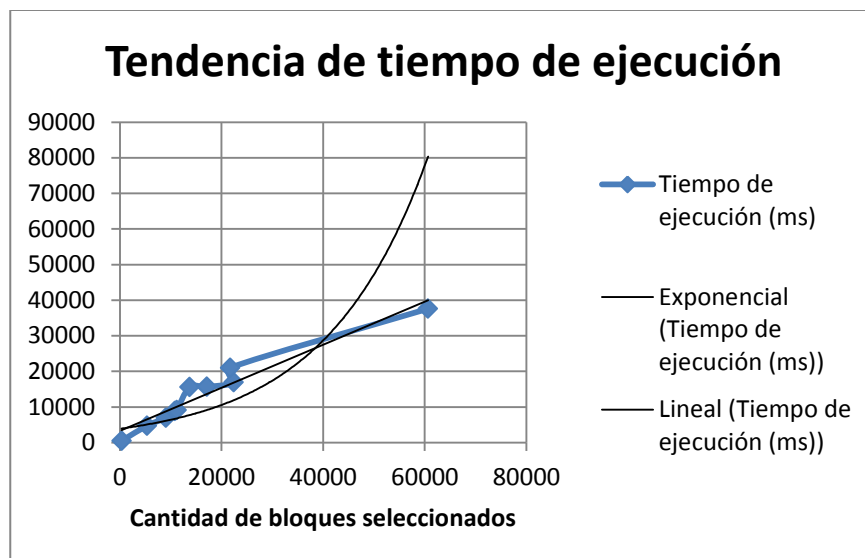


Ilustración 26: Tiempos de ejecución en pruebas aleatorias.

3.4. Datos de prueba. Algoritmo usando diferentes ángulos de talud.

Tener en cuenta los diferentes ángulos de talud que pueden presentarse en la concepción de un proyecto minero es vital a la hora de modelar un yacimiento. La prueba siguiente emplea diferentes ángulos en las direcciones acimutales con el objetivo de comprobar que se resuelva el problema planteado.

Modelo	bm-prueba-01	bm-prueba-02	bm-prueba-03	bm-prueba-04	bm-prueba-05
Cantidad bloques	50000	100000	150000	200000	250000
Dimensiones bloque	10x10x10	10x10x10	10x10x10	10x10x10	10x10x10

Taludes definidos para la prueba.

N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
40	40	40	45	55	55	55	51

Se utilizó interpolación con una salida de 100 puntos para suavizar las curvas que definen el volumen de restricción.

El polígono base utilizado fue el mismo en todos los modelos, y se ubicó en el nivel inferior del modelo ($z = 0$) lo que permite mostrar la relación existente entre el tiempo de ejecución del algoritmo en dependencia del tamaño del modelo. Los bloques en todos los modelos se definieron con las mismas dimensiones, $10 \times 10 \times 10$ unidades, para poder mostrar resultados en condiciones equivalentes.

A continuación se expone una gráfica resumen con los costos computacionales, en materia de tiempo de ejecución, de las operaciones realizadas:

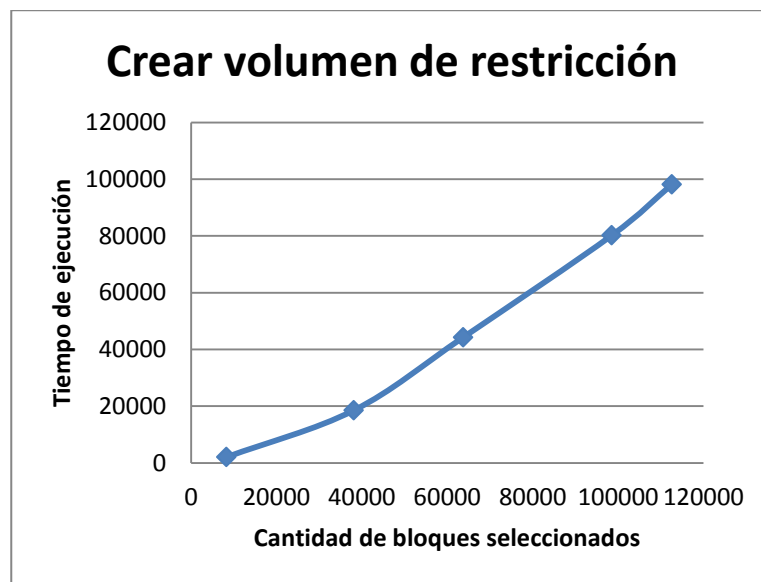


Ilustración 27: Crear volumen de restricción en diferentes modelos. Tiempos de ejecución.

La **Ilustración 27** muestra claramente que el tiempo de ejecución del algoritmo es lineal. Esto se comprueba al ver que en los 5 modelos probados se obtiene una cantidad de bloques extraídos que crece en relación directamente proporcional al cuadrado del radio (esto es evidente puesto que el área de una circunferencia crece en esta misma relación, por tanto, al aumentar el área del polígono en cada nivel, la cantidad de bloques que se extraen crece en la misma proporción). Sin embargo, el tiempo de ejecución del algoritmo en cada modelo de bloques crece linealmente, lo que indica que existe una relación lineal directamente proporcional entre la cantidad de operaciones y la cantidad de bloques.

Segunda prueba. Volumen de restricción de dimensiones fijas.

Para esta prueba se utilizaron los mismos modelos con los mismos ángulos de talud definidos en la prueba anterior, la diferencia radica en el polígono base utilizado. En este caso el polígono base se ubicó en el centro del modelo, a 15 niveles por debajo de la superficie (es decir, en el banco número 15 desde la superficie del modelo), teniendo siempre las mismas dimensiones. Esto permite realizar una comparación en cuanto a tiempo de ejecución en modelos de diferentes dimensiones, teniendo la misma cantidad de bloques de salida, para comprobar directamente las diferencias.

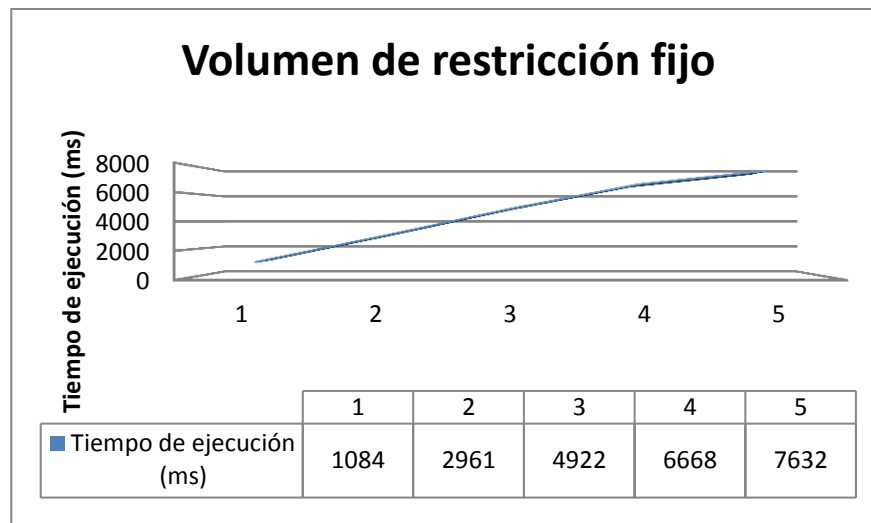


Ilustración 28: Creación de volúmenes de restricción equivalentes en modelos de diferente dimensión.

Como se observa en la **Ilustración 28**, teniendo la misma cantidad de bloques de salida (3948), los tiempos de ejecución crecen linealmente; a partir de aquí puede concluirse que esto representa directamente el valor de la complejidad temporal del algoritmo creado.

3.5. Datos de prueba. Validación del uso de QHash.

La estructura o tipo de dato QHash se utilizó debido a la facilidad con que se puede utilizar y la gran eficiencia que brinda. En la siguiente tabla se muestran los resultados de pruebas sobre cinco modelos de bloques en cuanto a tiempos de ejecución y consumo de memoria RAM en cada caso.

Modelo	Tiempo de construcción del modelo	Consumo de memoria modelo	Cantidad de bloques dentro	Tiempo de construir visual bloques dentro	Consumo de memoria mostrar visual bloques dentro
1	1862	8474	8286	22	2119
2	8267	16947	38143	100	8474
3	18961	33892	63740	174	10490
4	32953	33892	98521	269	16947
5	41481	41956	112640	303	16947

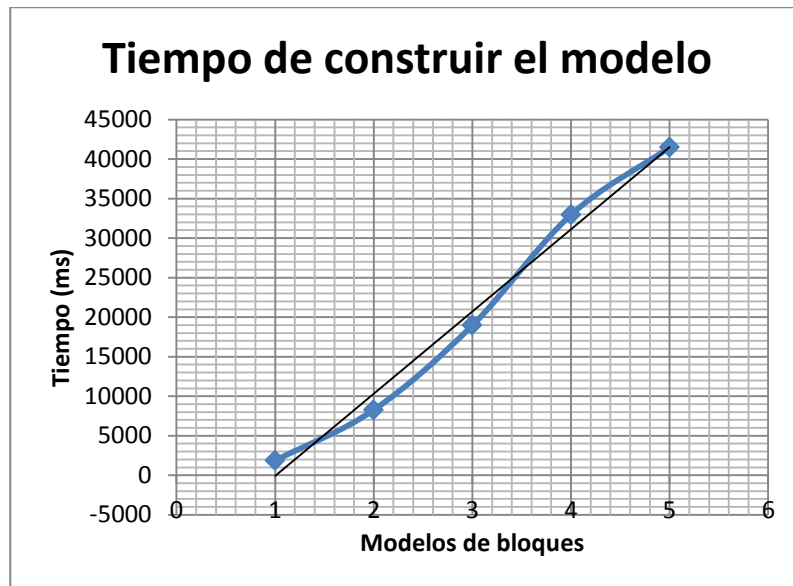


Ilustración 29: Tiempo necesario para construir los modelos de bloques.

El tiempo de construir el modelo de bloques usando la estructura de Octree Lineal implementado sobre una tabla Hash muestra una tendencia lineal. Esto permite trabajar eficientemente con modelos de gran extensión.

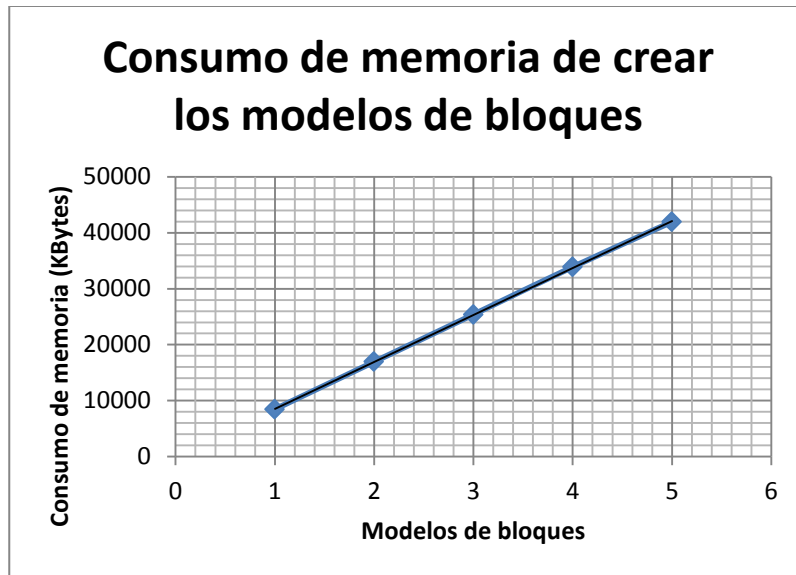


Ilustración 30: Consumo de memoria de cada modelo de bloques.

El consumo de memoria al crear estos modelos de bloques se mantiene constante para cada modelo (**Ilustración 30**) y depende únicamente de la cantidad de bloques que se guarden.

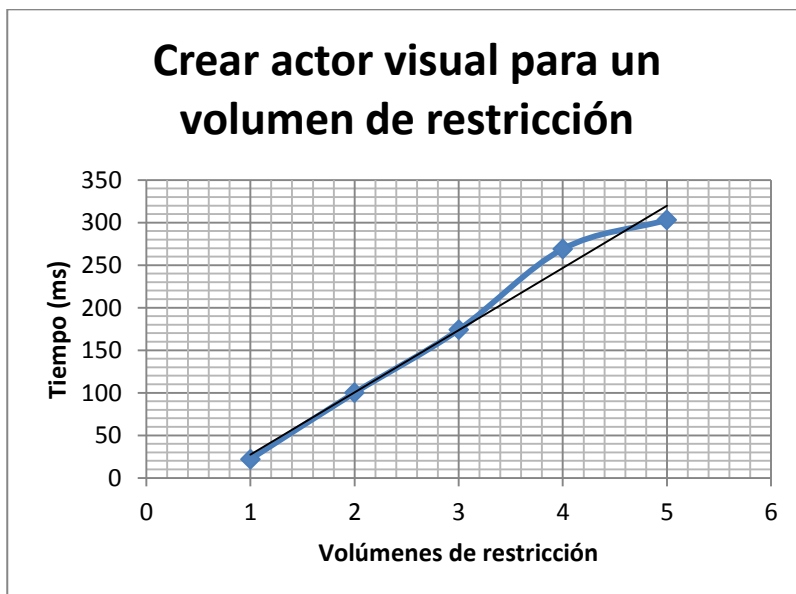


Ilustración 31: Crear un actor visual para un volumen de restricción definido.

El tiempo de construir los bloques visuales que serán mostrados también sigue una tendencia lineal. Este tiempo es el que le toma a la aplicación generar los actores visuales que representan a los bloques que conforman el volumen de restricción.

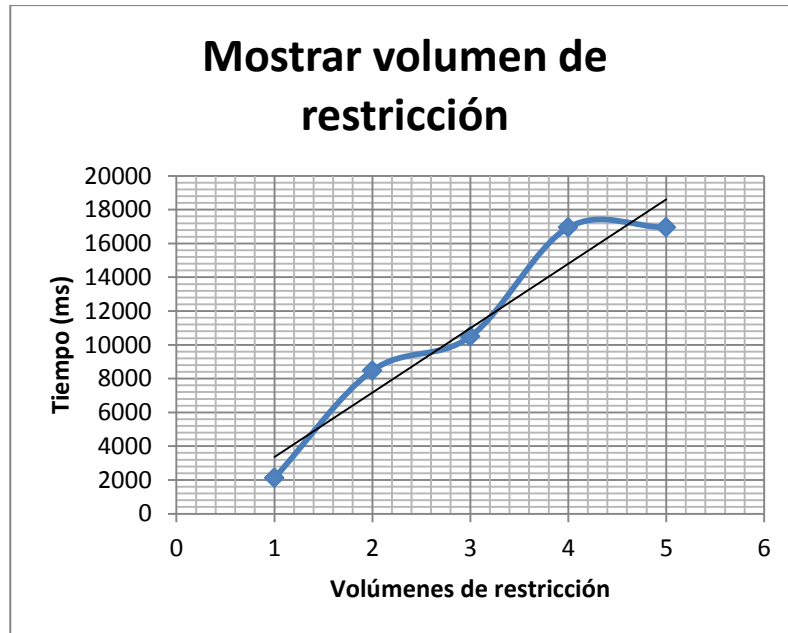


Ilustración 32: Mostrar el volumen de restricción.

La **Ilustración 32** muestra el consumo de memoria RAM de mostrar los bloques que están dentro del volumen de restricción creado, una vez que se ha ejecutado el algoritmo.

3.6. Análisis de la complejidad temporal.

La reducción del costo computacional es el principal objetivo de esta investigación, por tanto se emplearon estructuras eficientes en la implementación de los algoritmos propuestos. A continuación se expone una tabla resumen con los costos computacionales, en materia de tiempo de ejecución, de las principales operaciones realizadas:

Operación	Complejidad temporal
Búsqueda de un bloque	Promedio: $O(1)$; Peor Caso: $O(n)$

Punto dentro de un polígono	$O(n)^*$
Ángulo entre segmentos	$O(1)$
Seleccionar bloques por nivel	$O(k \log(n))^*$
Crear volumen de restricción	Mejor Caso: $O(\log(n))$; Promedio: $O(n)$; Peor Caso: $O(n^2 \log(n))$
Construir modelo de bloques	$O(n^3)$

*El método para encontrar un punto dentro de un polígono se utiliza para encontrar, dadas las coordenadas de un bloque en el modelo, si éste pertenece al anillo de restricción formado en el nivel en el que se encuentra el bloque dado. Por tanto, la complejidad temporal de este método depende de la cantidad de puntos que tenga el polígono, y al ser esta una cantidad fija, no se asume este método como de complejidad $O(n)$ al considerar la complejidad temporal del método para seleccionar bloques por niveles que lo utiliza.

La operación más costosa computacionalmente es la de construir el modelo de bloques, pues hay que crear cada bloque, calcular su centro y sus coordenadas e insertarlo en la estructura que almacena el modelo de bloques. Al ser $M \times N \times O$ la cantidad de bloques, no se puede realizar esta operación en un tiempo eficiente, a menos que se implementen diferentes hilos de ejecución y métodos concurrentes. Sin embargo, una vez creado el modelo, las operaciones sobre éste son muy eficientes, como se prueba en este trabajo.

3.7. Conclusiones parciales

El uso del QHash como una estructura para almacenar los datos del modelo de bloques brinda gran eficiencia en todas las operaciones, pues guarda la información que contiene en una estructura lineal de índices mediante los cuales se accede a cada elemento. Al no usar nodos y punteros se obtiene una forma muy rápida de realizar las búsquedas.

El tiempo de ejecución del algoritmo creado es lineal; depende, en relación lineal, de la extensión del modelo en cuanto a cantidad de bloques; y depende, en relación logarítmica, de la cantidad de bloques que necesiten ser analizados.

Los algoritmos para crear diseños de minas a cielo abierto analizados en (1.2.2) empleados en las aplicaciones internacionalmente validadas pueden ser implementados de forma tal que acepten como entrada los volúmenes de restricción creados en esta investigación, lo cual representaría una optimización considerable en el proceso de diseñar minas a cielo abierto.

CONCLUSIONES GENERALES

La investigación mostró resultados positivos, los cuales pueden referirse así:

- La minería a cielo abierto es la más utilizada en Cuba; debido a sus características es necesario contar con aplicaciones informáticas que modelen el terreno y apliquen una restricción geométrica, basada en diferentes criterios, para comenzar el proceso de diseñar óptimamente la explotación.
- El costo computacional de procesar los datos de un modelo de bloques para realizar el diseño de una mina a cielo abierto es exponencialmente elevado, debido a esto, es necesario contar con un método que permita reducir este volumen manteniendo ciertas restricciones geométricas.
- Mediante las técnicas descritas en este trabajo, es posible y altamente factible definir un volumen de restricción inicial sobre el cual aplicar los algoritmos de diseño de minas.
- Los algoritmos para crear diseños de minas a cielo abierto analizados en (1.2.2), los cuales son empleados en las aplicaciones informáticas internacionalmente validadas en el área geólogo-minera, pueden ser implementados de forma tal que acepten como entrada los volúmenes de restricción creados mediante las técnicas descritas en esta investigación, lo cual contribuiría considerablemente a reducir el costo computacional de obtener el diseño de minas a cielo abierto y justificaría los resultados obtenidos en este trabajo.
- El uso de la estructura de datos QHash permite reducir considerablemente la complejidad temporal del algoritmo, pues su representación del espacio tridimensional utilizando índices para cada elemento según su posición y almacenándolos de forma lineal ofrece gran eficiencia.

RECOMENDACIONES

Los algoritmos para crear diseños de minas a cielo abierto analizados en (1.2.2), los cuales son empleados en las aplicaciones informáticas internacionalmente validadas en el área geólogo-minera, pueden ser implementados de forma tal que acepten como entrada los volúmenes de restricción creados mediante las técnicas descritas en esta investigación, lo cual contribuiría considerablemente a reducir el costo computacional de obtener el diseño de minas a cielo abierto.

Extender la aplicación desarrollada incorporándole métodos que utilicen programación paralela para agilizar el proceso de creación del modelo de bloques, que es la operación más costosa, y sobre este resultado, permitir incorporar algoritmos de diseño de minas a cielo abierto tomando como entrada el volumen de restricción en modelos de bloques geológicos que se obtiene en este trabajo.

Integrar esta aplicación al producto SYAM desarrollado en el proyecto Sistema Minero Cubano, con el objetivo de dotar a este sistema de una herramienta que permita el diseño de minas a cielo abierto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anton, H. 1997. *Introducción al Álgebra lineal.* 1997.

Barsky, B. A. 1989. *Geometric continuity of parametric curves: Three equivalent characterizations.* s.l. : IEEE Computer Graphics and Applications, 1989.

Bastante, Fernando Garcia. 2004. *Diseño y planificación de explotaciones a cielo abierto mediante algoritmos de optimización.* s.l. : Universidad de Vigo, 2004. págs. 93-103.

Caccetta L., Kelsey P., Giannini L. 1998. *Open pit mine production scheduling.* New York : APCOM, 1998.

Catmull, E. y Rom, R. 1974. *A Class of Interpolating Splines. Computer Aided Geometric Design.* Washington : Academic Press., 1974.

Chen, T. 1976. *3D pit design with variable wall slope capabilities.* New York : APCOM, 1976.

Dahlquist, Germund y Björk, Åke. 1974. *Equidistant Interpolation and the Runge Phenomenon. Numerical Methods.* Stockholm, Sweden : Stockholm University, 1974. ISBN 0-13-627315-7.

DATAMINE. 2003. Conceptos básicos en el diseño de minas a cielo abierto. . 2003.

Eberly, David. 1999. *Kochanek-Bartels Cubic Splines (TCB Splines).* s.l. : Geometric Tools, LLC, 1999.

GEMCOM. 2013. GEMCOM SOFTWARE. [En línea] GEMCOM SOFTWARE, 2013. [Citado el: 12 de marzo de 2013.] <http://www.gemcomsoftware.com>.

Grumbaum, B. 2003. *Are your polyhedra the same as my polyhedra? Discrete and computational geometry.* Washington : Washington University, 2003.

Hoek, E. y Bray, J. W. 1981. *Rock Slope Engineering.* 3rd edition. s.l. : The Institute of Mining and Metallurgy, London., 1981.

Jeffreys, H. 1988. *Methods of Mathematical Physics, 3rd ed.* Cambridge : Cambridge University Press, 1988.

Keim, D. A. 1999. *Efficient geometry-based similarity search of 3-D spatial databases.* Saale, Germany : University of Halle-Wittenberg, 1999.

Kochanek, Doris y Bartels, Richard. 1984. Interpolating splines with local tension, continuity, and bias. s.l. : ACM SIGGRAPH, 1984. Vol. 18, 3, págs. 33-41.

Legrá, Arístides. 2003. *La calidad de la información en el proceso de la automatización de la minería del níquel en Cuba.* Moa : Minería y Geología. ISMM, 2003. 0258 5979.

- Lemieux, M. 1979.** *Moving Cone Optimizing Algorithm*. s.l. : Computer methods for the 80's in the mineral industry. Canadian Institute of Mining Trans., 1979.
- Lerchs, H. y Grossmann, I.F. 1965.** *Optimum design of open pit mines*. s.l. : Canadian Institute of Mining Trans., 1965.
- Lipkewich, M. P. y Borgman, M. 1969.** *Two- and three- dimensional pit design Optimization techniques*. s.l. : A decade of digital computing in the mineral industry., 1969.
- Morales, Miguel. 2013.** Gaussianos. [En línea] 2013. [Citado el: 5 de abril de 2013.] <http://gaussianos.com/una-interesante-introduccion-a-la-geometria-computacional/>.
- Pana, M. T. 1965.** *The simulation approach to open pit design*. Arizona : Proceedings, V APCOM Symp, Tucson, Arizona University, 1965.
- Peirano, Fernando. 2011.** *Definicion de pit final capacitado bajo incertidumbre. Tesis maestría en Ingeniería de minas*. Santiago de Chile : Universidad de Chile. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas., 2011.
- Peña, Rosa. 2012.** *Diseño de minas a cielo abierto mediante algoritmos de optimización*. Habana : Universidad de las Ciencias Informáticas, 2012.
- Pilouk, A. 2008.** *Spacial data modeling for GIS 3D*. Berlin : Berlin Springer, 2008.
- Popular, Asamblea Nacional del Poder. 1994.** Ley 76. Ley de Minas. *Gaceta Oficial de la República de Cuba*. Habana : Asamblea Nacional del Poder Popular, 1994.
- Preparata, F. P. y Shamos, M. I. 1985.** *Computational Geometry*. s.l. : Springer-Verlag, 1985. 0-387-96131-3.
- Quezada, E., Morales, D. y Ramon, R. 2011.** *TI-Octree, índice espacial aplicado a estructuras geológicas*. Habana : s.n., 2011.
- Rodríguez, Héctor. 2009.** *5to Congreso Cubano de Geofísica*. La Habana : s.n., 2009.
- Rubio, E. 2008.** *Tópicos avanzados de Planificación Minera*. Santiago de Chile : Universidad de Chile, 2008.
- Ruiz, Héctor Rodríguez. 1990.** *Premisas geológicas para la automatización integral de los trabajos de prospección en yacimientos níquelíferos de intemperismo*. Departamento de Geología Aplicada. Holguín : Centro de Informática, Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, 1990. Tesis Doctoral.
- Samet, Hanan. 1990.** *Applications of spatial data structures: computer graphics, image processing and GIS*. s.l. : Addison-Wesley, 1990.

Satarband, Javar. 2012. *Modeling of accurate variable slope angles in open-pit mine design using spline interpolation.* Irán : Sahand University of Technology, 2012.

Shamos, Michael y Hoey, Dan. 1976. *Geometric intersection problems.* s.l. : IEEE Symp. Foundations of Computer Science, 1976.

Trefethen, Lloyd. 2008. *Numerical Analysis.* s.l. : Princeton University, 2008, 4.

Urbina, F. Plá Ortiz de. 1994. *Fundamentos de Laboreo de Minas.* Madrid : Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas, 1994.

Valle, Yusnier. 2009. *Modelado y visualización de superficies de terrenos en 3 dimensiones .Tesis presentada en opción al título de Máster en Informática.* Habana : s.n., 2009.

Whittle, Alford. 1986. *Application of Lerchs–Grossmann pit optimization to the design of open pit mines.* s.l. : AusIMM–IE Aust Newman Combined Group., 1986.

Zachmann, Gabriel y Langetepe, Elmar. 2006. *Geometric Data Structures for Computer Graphics.* Bonn, Germany : University of Bonn, 2006.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Ley 76/1994: Ley de minas. Gaceta Oficial de la República de Cuba.

Pit slope design and risk – A view of the current state of the art.

Mr. T. D. Sullivan

International Symposium on Stability of Rock Slopes in Open Pit Mining and Civil Engineering.

The South African Institute of Mining and Metallurgy

Trabajos mineros a cielo abierto.

José Otaño Noguel

Armando Cuesta Recio

Instituto Superior Minero-Metalúrgico de Moa; Holguín, Cuba.

Diseño de Minas a Cielo Abierto, 2008.

<http://geoestadistica.com/disenominaopenpit.htm>

Mathematical Optimization Models and Methods for Open-Pit Mining.

Henry Amankwah

Department of Mathematics

Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, 2011.

A Fast Algorithm to Display Octrees.

Sharat Chandran

Indian Institute of Technology; Bombay, India.

Ajay K. Gupta

Informix; Oakland, USA.

Introducción a la Geometría Computacional.

MSc. Romanuel Ramón Antúnez.

Centro de desarrollo GEYSED, UCI; La Habana, Cuba.

ANEXOS

Anexo 1. Imágenes de los métodos creados en la herramienta desarrollada.

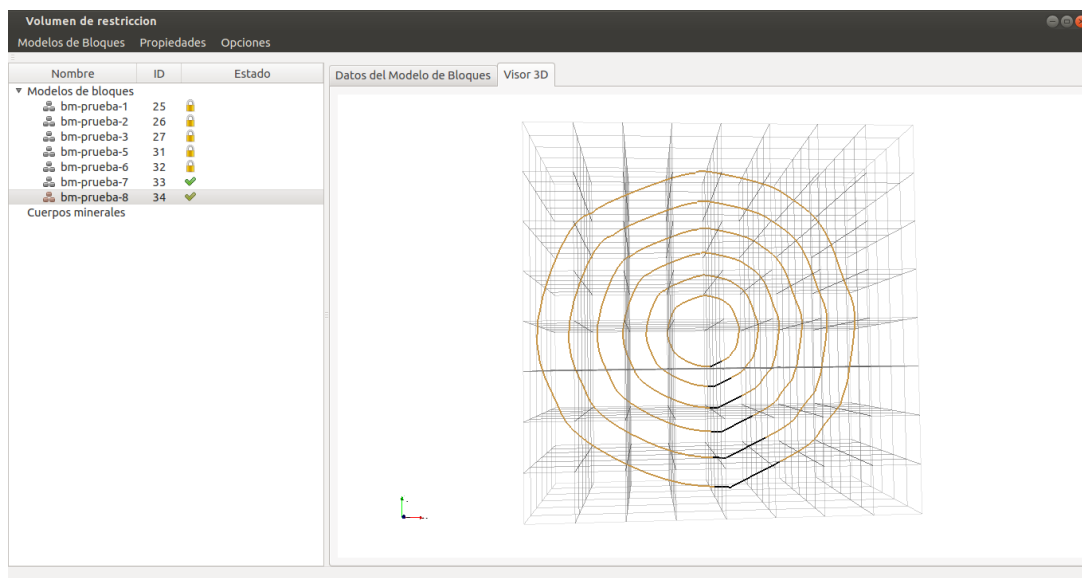


Ilustración 33: Vista superior del modelo de bloques. Polígonos creados en cada nivel o banco.

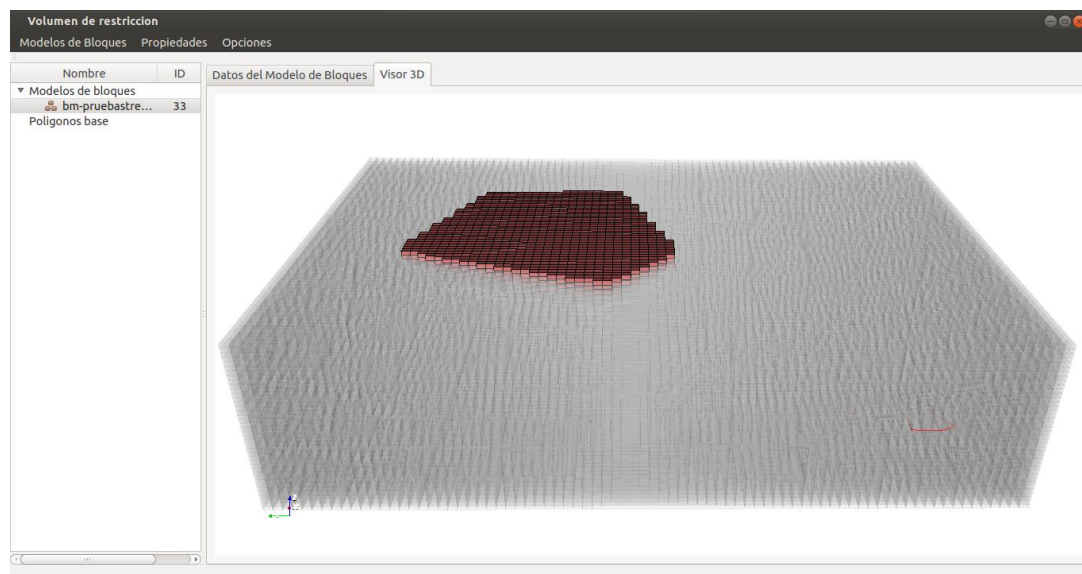


Ilustración 34: Modelo de bloques con volumen de restricción definido sin usar interpolación.

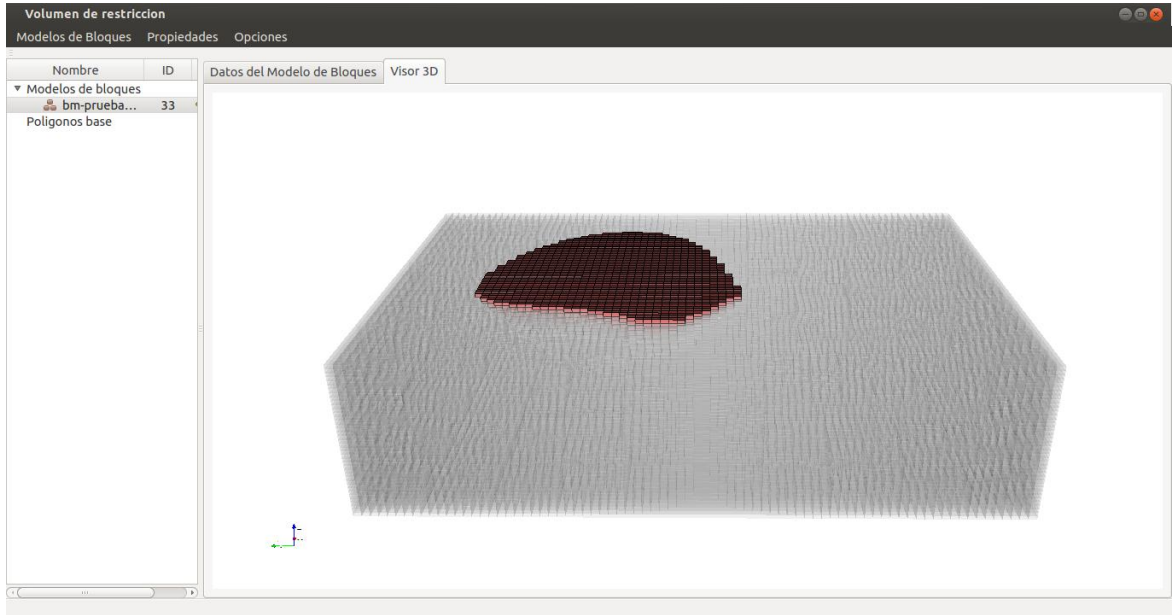


Ilustración 35: Modelo de bloques con volumen de restricción definido usando interpolación.

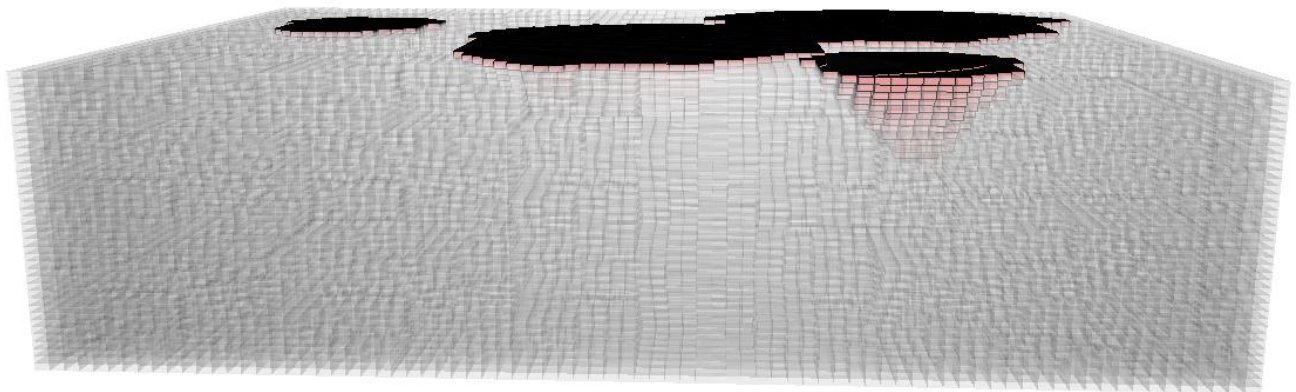


Ilustración 36: Varios volúmenes de restricción con diferentes parámetros creados en un mismo modelo de bloques.

GLOSARIO DE TÉRMINOS⁵

Ángulo de talud: Inclinación de las paredes en una excavación a cielo abierto, medida desde la base hasta el borde superior en la superficie del hueco.

Banco: Escalón o unidad de explotación sobre la que se desarrolla el trabajo de extracción en las minas a cielo abierto. Niveles en que se divide una explotación a cielo abierto para facilitar el trabajo de los equipos de perforación, cargue y transporte.

Ley: Contenido de metal valioso en una mena, expresado generalmente en porcentaje o en gramos de metal por tonelada de mena.

Ley de corte (cut off): Es la concentración mínima que debe tener un elemento en un yacimiento para ser económicamente explotable, es decir, la concentración que hace posible pagar los costes de su extracción, su tratamiento y su comercialización. Es un factor que depende a su vez de otros factores, que pueden no tener nada que ver con la naturaleza del yacimiento, como por ejemplo, su proximidad o lejanía a vías de transporte, avances tecnológicos en la extracción, entre otros. Es la ley por debajo de la cual un yacimiento no es económicamente explotable. Contenido mínimo del mineral en la muestra para que pueda ser considerado como reserva.

Mina: Excavación que tiene como propósito la explotación económica de un yacimiento mineral, la cual puede ser a cielo abierto, en superficie o subterránea. Yacimiento mineral y conjunto de labores, instalaciones y equipos que permiten su explotación racional. Yacimiento, formación o criadero de minerales o de materias fósiles, útil y aprovechable económicamente, ya se encuentre en el suelo o el subsuelo.

Campaña de prospección: Reconocimiento o exploración superficial de una zona, dirigida a determinar áreas de posible mineralización (áreas anómalas), por medio de indicaciones químicas y físicas medidas con instrumentos y técnicas de precisión.

⁵ Tomados de la Ley 76: ley de minas de la República de Cuba. Tomados del glosario minero de la República de Colombia.

Topografía: 1. Conjunto de métodos y técnicas que se utilizan para la representación plana de zonas no muy extensas de la superficie terrestre y que expresan la configuración del terreno y sus accidentes naturales y artificiales. 2. Arte o práctica de delinear en detalle, gráficamente y con exactitud, en un mapa o plancha topográfica o mediante un modelo, los accidentes naturales y artificiales encontrados en la superficie de un terreno. También la descripción, el estudio o la representación de tales rasgos.

Topología: Las relaciones espaciales entre elementos de coberturas adyacentes o conectados. Estas relaciones son construidas desde elementos simples hasta complejos. Es esencial para operaciones de modelado y análisis espacial.