



Temática: IV Taller internacional de Enseñanza de las Ciencias Informáticas

Habilidad resolver problemas combinatorios mediante la clasificación y representación de conjuntos de resultados: Preparación metodológica

Ability to solve combinatorial problems by classifying and representing sets of results: Methodological preparation

José Hilario Quintana Álvarez ^{1*}, Tito Díaz Bravo ² y Alejandro Rosete Suarez ³

¹ Universidad de Ciencias Informáticas. Carretera a San Antonio, Km 2½. jhquintana@uci.cu

² Universidad de Ciencias Informáticas. Carretera a San Antonio, Km 2½. tdiaz@uci.cu

³ Universidad Tecnológica de la Habana José Antonio Echeverría. Calle 114. Marianao. rosete@ceis.cujae.edu.cu

*Autor para la correspondencia. jhquintana@uci.cu

RESUMEN

En aras de contribuir al desarrollo de la habilidad resolver problemas combinatorios en la Matemática Discreta de la Ingeniería en Ciencias Informáticas y carreras afines, se analizan dos aspectos que pueden contribuir a mejorar la interpretación de los problemas por parte de los estudiantes. Se trata de la clasificación de los problemas combinatorios y la formulación de conjuntos de resultados. Estos aspectos no se trabajan de modo sistemático en el aula. Con el objetivo de incluir estas cuestiones en la preparación metodológica de los profesores que imparten Combinatoria en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) se realizaron dos sesiones de trabajo. Se detalla el contenido de ambas sesiones.

Palabras clave: Matemática Discreta, Combinatoria, Habilidad resolver problemas, Preparación metodológica, Clasificación, Conjuntos de resultados.



Abstract

In order to contribute to the development of the ability to solve combinatorial problems in discrete mathematics taught in computer science engineering and related careers, two aspects are analyzed that can contribute to improving the students interpretation of problems. It deals with the classification of combinatory problems and the formulation of outcomes sets. These aspects are not worked on in a systematic way in the classroom. In order to include these issues in the methodological preparation of teachers who teach combinatorics at the University of Informatics Science (UCI). The content of two work sessions is detailed.

Keywords: *Discrete Mathematics, Combinatory, Problem Solve Skill Development, Methodological preparation, Classification, Outcomes sets*

Introducción

En el Computer Science Currícula del 2013, documento elaborado por la Fuerza de tarea conjunta de la Asociación de Currículos de Computación para la ACM y IEEE se destaca que:

Las Matemáticas Discretas, también llamadas Estructuras Discretas, constituyen una materia fundacional para las ciencias de la computación ya que, si bien pocos científicos de la computación tendrán trabajo primariamente con estructuras discretas, en muchas otras áreas de las ciencias de la computación se requiere la habilidad de trabajar con conceptos que provienen de las estructuras discretas (ACM_IEEE, 2013, p. 76).

El documento agrega que el contenido de la Matemática Discreta:

Penetra en las áreas de estructura de datos y algoritmos, pero aparece fácilmente en cualquier lugar de las ciencias de la computación. Por ejemplo, una habilidad para crear y comprender una prueba, ya sea formal o informal, es importante en virtualmente en todas las áreas de las ciencias de la computación lo que incluye la especificación formal, verificación, bases de datos y criptografía. Los

conceptos de la teoría de conjuntos son utilizados en ingeniería de software y bases de datos. La teoría de probabilidades es empleada en sistemas inteligentes, redes de trabajo, y un número de aplicaciones computacionales (ACM_IEEE, 2013, p. 76).

En correspondencia con tales recomendaciones, las fuentes bibliográficas utilizadas en la impartición de la combinatoria dentro de la Matemática Discreta incluyen de manera general los siguientes contenidos: Principios de la multiplicación, la suma y de las casillas; Permutaciones, r-permutaciones y combinaciones; Así como las permutaciones y combinaciones generalizadas, teorema del binomio y triángulo de Pascal. (Johnsonbaugh, 2005), (Rosen, 2012), (Grimaldi, 2004) y (García, 2018).

En las carreras Ingeniería en Ciencias Informáticas e Ingeniería Informática, la Matemática Discreta forma parte de la Disciplina Inteligencia Computacional, en la cual la solución de problemas se considera esencial por su contribución al pensamiento lógico y computacional de los estudiantes, porque los prepara para modelar y aplicar creativamente y con enfoque científico métodos de razonamiento lógico, matemáticos, probabilísticos, heurísticos y metaheurísticos y les entrena en la toma de decisiones con vistas a racionalizar u optimizar los procesos y recursos de las organizaciones (MES, 2017), (MES, 2019).

Navarro-Pelayo (1996), Lockwood (2013), Lockwood (2014), Godino (2016), Meika D. (2018), Gordon (2019) reportan las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando resuelven problemas combinatorios; específicamente en los procesos para interpretar textos, identificar y representar lo dado y lo buscado; modelar situaciones, y aplicar los contenidos teóricos de la combinatoria relacionados con el insuficiente desarrollo de la habilidad general resolver problemas de combinatoria.

A tenor con las experiencias de los presentes autores en la impartición de la combinatoria en la Ingeniería en Ciencias Informáticas e Ingeniería Informática, los estudiantes repiten esos mismos errores cuya presencia pudiera estar influenciada por los métodos de enseñanza, y las formas de organización utilizadas en un contenido que se caracteriza por la forma de los problemas de conteo:



...fáciles de enunciar, pero pueden tener soluciones con una complejidad subyacente. Tanto en la secundaria como en la universidad, los estudiantes son introducidos al conteo mediante fórmulas y problemas tipo, lo que puede ser beneficioso para el estudiante, pero también puede ser una desventaja ya que el estudiante puede comenzar a confiar en la memorización. (Gordon, 2019, p. 8)

A partir del análisis de propuestas interesantes realizadas por varios investigadores de la didáctica de la combinatoria, esta comunicación tiene el objetivo de describir una variante de preparación metodológica a los profesores sobre el desarrollo de la habilidad resolver problemas combinatorios, para influir en la mejora del aprendizaje de estos contenidos.

Materiales y Métodos

Para la realización de la propuesta se realizó una investigación de carácter cualitativo, en la que se emplearon los métodos teóricos Histórico-Lógico y de Análisis-Síntesis fundamentalmente, como apoyo al estudio documental de libros, artículos, tesis y otros documentos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la combinatoria y que se reflejan en las citas que aparecen a lo largo de la obra.

Como resultado de las lecturas realizadas a la luz de la experiencia docente de varios años de impartición del contenido se realizó la sistematización de los elementos considerados relevantes, y se sintetizó una propuesta para la preparación de los profesores con aspectos que se utilizan con poca frecuencia en el desarrollo de la habilidad resolver problemas combinatorios. Los resultados de las sesiones de preparación docente, con los elementos reflejados en esta comunicación, permitieron enriquecer la propuesta que aquí se presenta.

Los presentes autores asumen el concepto de problema definido por Mazario (2009, p. 13): “Situación o dificultad prevista o espontánea con algunos elementos desconocidos por el sujeto, pero capaz de provocar

la realización de acciones sucesivas para darle solución”. Se acepta además que la resolución de problemas constituye una habilidad, “y como tal se caracteriza y estructura posteriormente, todo ello en base a determinadas acciones, que son las que permiten acceder a las vías para resolver problemas” (Mazario, 2009, p. 13).

La habilidad resolver problemas es “el proceso que implica la realización de una secuencia de acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con la intención de resolverla, es decir la satisfacción de las exigencias (meta, objetivo) que conducen a la solución del problema matemático” (Mazario, 2009, p. 13).

Ajustando la definición ofrecida por Ferrer Vicente (2000, p.55), la habilidad resolver problemas combinatorios consiste en la “construcción y dominio, por el alumno, de los modos de actuar y métodos de solución de este tipo de problemas utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos combinatorios en calidad de instrumentos y las estrategias de trabajo heurísticas para la sistematización de esos instrumentos en una o varias variantes de solución.

Para contribuir a desarrollar el razonamiento combinatorio de los estudiantes, en el volumen I del libro *Matemática Discreta* de Jhonsonbaugh (2005), se ofrece un resumen de la técnica de solución de problemas que incluye: “Sustituir el problema por un problema más sencillo, lo que puede lograrse reduciendo el tamaño del problema original; Numerar los elementos de manera sistemática para que surjan patrones; Buscar patrones; Buscar un problema similar e imitar su solución” (p. 229). Vale aclarar que este libro constituye el texto básico para la impartición de la *Matemática Discreta* en las carreras de Ingeniería en Ciencias Informáticas y carreras afines.

El resumen anterior tiene un carácter bastante general y declarativo, no se especifica en cuales casos resulta válido aplicar cada uno de las técnicas específicas ni cómo hacerlo. A veces no es posible sustituir un problema por otro más sencillo, y es más fructífero descomponerlo en subproblemas. Tampoco se hacen recomendaciones de comprobación de la validez de las soluciones dadas.



Teniendo en cuenta lo anterior a continuación, se presentan dos elementos que no se trabajan sistemáticamente en la enseñanza de la combinatoria y que con el debido tratamiento didáctico pueden contribuir a perfeccionar el desarrollo de la habilidad resolver problemas combinatorios.

Clasificación de los problemas combinatorios

Según Dubois (1984) citado por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996; pp.28-30), es posible clasificar las configuraciones combinatorias simples en tres modelos:

- Selección, donde a partir de un conjunto de n objetos se toma una muestra de r de ellos y en dependencia de que se considere o no el orden, así como de que se acepten o no elementos repetidos tendremos las cuatro operaciones combinatorias básicas: $PR_{n,r}, P_{n,r}, CR_{n,r}, C_{n,r}$;
- Colocación, relacionado con el concepto de aplicación entre dos conjuntos, donde hay que ubicar una serie de n objetos en r celdas (Si a cada uno de los objetos le corresponde una única celda, la fórmula es $C_{n,r}$), las condiciones relacionadas con el hecho de que los objetos y/o las celdas sean distinguibles, si deben ordenarse o no los objetos dentro de las celdas, así como las cantidades de objetos que se pueden ubicar en cada celda dan lugar a variaciones interesantes del modelo;
- Partición o división de un conjunto en subconjuntos, donde se trata de contar las formas en que un conjunto de n elementos puede dividirse en k subconjuntos.

En ocasiones una misma fórmula puede dar solución a problemas de clasificaciones diferentes o a variantes de la misma clasificación. Según la experiencia acumulada en la enseñanza de la combinatoria, en los libros de textos y en nuestras clases solo se hace alusión a la clasificación según los modelos de selección cuando a veces estamos en presencia de situaciones que pudieran ser enmarcadas en el resto de las clasificaciones. Este desconocimiento puede dar lugar a dificultades con el aprendizaje al desconocerse el verdadero alcance del contenido.

Representación de los conjuntos de resultados

De acuerdo con Looockwood (2013) los conjuntos de resultados (set of outcomes) constituyen colecciones de “aquellos objetos que uno puede imaginar que resultan contados o generados en un proceso de conteo” (p. 253). Aunque en ocasiones estos objetos suelen ser muchos y difíciles de enumerar explícitamente, es importante que el estudiante los represente sino en su totalidad, aunque sea de forma parcial, mediante procedimientos recursivos, para reconocer los patrones que los conforman y facilitar una mejor comprensión del problema que enfrente.

Se coincide con Looockwood (2014), quien insiste en la importancia de enseñar a los estudiantes a enfocarse en los conjuntos de resultados “... como un componente intrínseco para resolver problemas de conteo. El punto es que al adoptar esa perspectiva, la facilidad de operar con los resultados es una parte natural de cómo se enfocan y resuelven” (...)” Los estudiantes pueden evitar dificultades comunes, como aplicar incorrectamente una fórmula, contar inadvertidamente o tener problemas de orden confusos” (p. 31).

Los análisis de las respuestas en las evaluaciones escritas realizadas en el curso 2018-2019 en la Facultad Introdutoria de Ciencias Informáticas (FICI) de la UCI, reflejan que muchos estudiantes no son sistemáticos en la utilización de representaciones de conjuntos de resultados cuando de resolver problemas combinatorios se trata, con frecuencia pasan a sustituir en la fórmula que consideran apropiada sin reflejar otro análisis (Quintana, Díaz, & Rosete, 2021).

Resultados y discusión

“El trabajo docente-metodológico es la actividad que se realiza con el fin de mejorar de forma continua el proceso docente educativo; basándose fundamentalmente en la preparación didáctica que poseen los profesores, así como en la experiencia acumulada” (MES, 2018, p. 22). Este trabajo es la vía para profundizar en la búsqueda de soluciones a los problemas señalados en la introducción de esta comunicación.

En el segundo semestre del curso 2019-2020, en el marco de las actividades de preparación metodológica del colectivo de 15 profesores de Matemática Discreta de la UCI se dedicaron dos sesiones de trabajo, en forma de taller, orientadas a la didáctica de la combinatoria en general y de manera específica al empleo de los recursos para la interpretación y búsqueda de la solución de los problemas combinatorios que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Recursos para la interpretación y la búsqueda de la solución en los problemas combinatorios

ítems	Recurso
1	Clasificación atendiendo a los modelos de Selección, Colocación o Partición.
2	Identificación de palabras clave.
3	Representación de los conjuntos de resultados de cada problema, antes de pasar a la modelación y búsqueda de la solución.
4	Fundamentación de cada paso en correspondencia con las definiciones y teoremas combinatorios implicados.
5	Búsqueda más de una vía de solución para cada problema.
6	Generación de nuevos problemas con clasificación diferente a la original, mediante ligeras modificaciones de sus textos, preservando en lo posible la fórmula combinatoria que le daba solución al problema original.
7	Generar problemas en los que a partir de un conjunto dado y cierta fórmula combinatoria se deben elaborar ejemplos de conjuntos de resultados de cardinal igual al valor de la fórmula, en un segundo momento se solicita elaborar problemas cuya solución las requieran.

Como primera actividad se realizó una encuesta a los docentes en la que estos debían reflejar la frecuencia con la que sus estudiantes aplicaban los recursos recogidos en la tabla 1 en la interpretación y la búsqueda de la solución de los problemas combinatorios. En la figura 1 se reflejan los resultados de la encuesta.

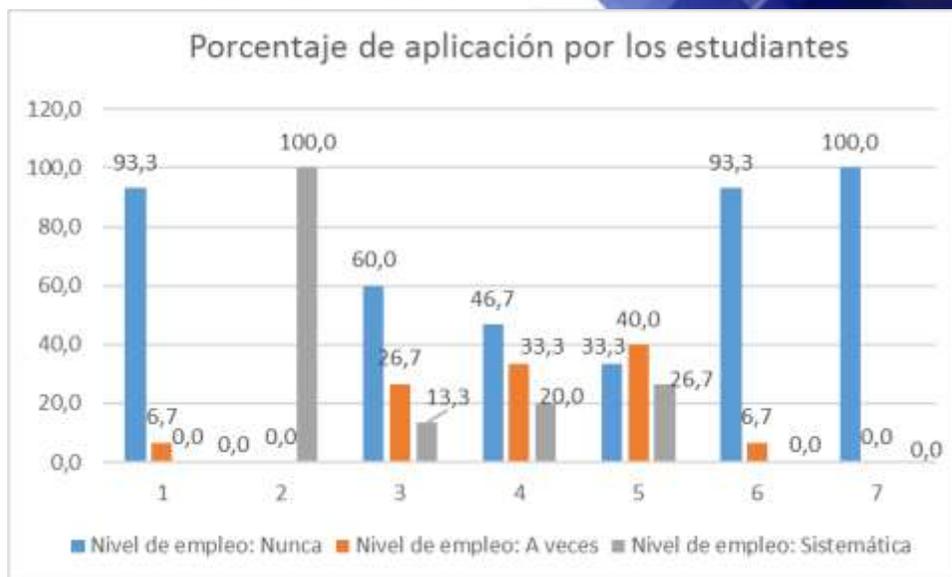


Fig. 1- Porcentajes de aplicación por los estudiantes de los ítems reflejados en la tabla 1 cuando resuelven problemas combinatorios, según criterio de sus profesores.

Se observa que con excepción del ítem 2, los niveles de aplicación del resto de los recursos no llegan a la categoría de Sistemáticos, esto conspira contra la solidez del desarrollo de la habilidad *Resolver problemas combinatorios*. Se deduce además que es necesario que los docentes trabajen más estos aspectos en el aula.

Tomando como punto de partida los resultados reflejados en la encuesta anterior, se solicitó a los docentes trabajar considerando los ítems de la tabla 1, con las colecciones de ejercicios que serán propuestos en las clases prácticas y el trabajo independiente del tema Combinatoria, estos ejercicios provienen de García (2018). Se formaron equipos de profesores y se distribuyeron los ejercicios.

La segunda sesión de trabajo metodológico comenzó con la exposición por cada equipo de los análisis realizados con cada uno de los problemas que les fueron asignados, se trató de presentar más de una alternativa de solución para cada ejercicio, se destacó la utilidad de orientar en los estudiantes la formación de hábitos para representar conjuntos de resultados y la clasificación de los problemas para obtener un mejor esquema mental de las situaciones, así como la necesidad de justificar cada paso como parte de la



didáctica específica de la combinatoria, que tiene como antecedente el tema Demostraciones. Fue muy productiva la participación del resto de los integrantes del taller enriqueciendo los análisis.

Al concluir la última sesión de trabajo se realizó un PNI con los participantes en los talleres:

Como aspectos positivos se reconoce que: La preparación adquirida en ambas sesiones de trabajo contribuye sin dudas a un mejor trabajo didáctico con los estudiantes al ofrecerles vías para la comprensión de los textos de los problemas, visualizar sus estructuras y las operaciones involucradas. Se fortalecen los procesos de transferencia ya que predomina un enfoque de sistema, donde un mismo ejercicio puede ser modificado en diversos modelos y se comparan las vías de solución de todos los problemas. Además, el estudiante adquiere alternativas para comprobar mejor la validez de las soluciones que encuentre.

El 100% de los docentes considera que todos los ítems analizados en el taller resultan pertinentes y aplicables, los cuales permiten enriquecer la atención diferenciada y potencia el estudio presencial e independiente.

Como aspecto negativo se planteó la carencia de análisis para el desarrollo de la habilidad Resolver problemas combinatorios en actividades no presenciales. Resultó muy interesante la interacción colectiva del colectivo de profesores, enriqueciendo las ideas, lo que permite una mejor dirección del estudiante y el grupo.

Entre las sugerencias se recoge la repetición de estos talleres enfocándose al trabajo con aplicaciones informáticas, diagramas de árbol, códigos de programación y el empleo de estrategias activas de aprendizaje.

Conclusiones

Para facilitar la interpretación de los estudiantes y por tanto un mejor desarrollo de la habilidad resolver problemas combinatorios, se profundizó en dos aspectos que no son objeto de trabajo sistemático en clases:

La clasificación de los problemas combinatorios y la formulación de conjuntos de resultados como pasos previos a la búsqueda de la solución.

Con el objetivo de preparar metodológicamente a los profesores que imparten Combinatoria en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) en la utilización de estos aspectos en el tratamiento didáctico de la resolución de problemas se realizaron dos sesiones de trabajo. Se trabajó con las colecciones de problemas, su clasificación, palabras clave, conjuntos de resultados, argumentación, soluciones múltiples y generación de nuevos problemas. Se hizo énfasis en procedimientos para elevar la interpretación de textos, los procesos de transferencia y de argumentación. Los participantes expresaron satisfacción por la realización de los talleres y ofrecieron valiosas sugerencias para próximas sesiones de trabajo metodológico.

En un futuro cercano deben analizarse variantes de diseño de este tipo de actividades de preparación metodológica tanto en las modalidades no presencial como presencial, según permita la Covid-19. Además, debe profundizarse en la calidad de los resultados que obtengan los estudiantes en este tema, una vez aplicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje las recomendaciones aludidas, con respecto a cuando no se hacía.

Referencias

- ACM_IEEE. (2013). Curricula guideline for undergraduate degree programs in computer science. *ACM_IEEE*. doi:10.1145/2534860
- Bogart, K. S. (2002). *Discrete math in computer science*. Copyright Kenneth P. Bogart and Cliff Stein. 2002.
- DUBOIS, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*(15 (1)), 35-57. Recuperado el 02 de 10 de 2020
- Epp, S. S. (2016). Discrete Mathematics for Computer Science. *13 th International Congress on Mathematical Education*, (págs. 1-8). Hamburg, 24-31 July. 2016. Obtenido de <https://www.mathunion.org/icml/conferences/icme/icme-13-2016>
- Ferrer Vicente, M. (2000). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades en la escuela media cubana*. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas, Santiago de Cuba.

- García, A. (2018). *Matemática Discreta para Ingenieros Informáticos*. La Habana: Libro en preparación. Universidad de las Ciencias Informáticas.
- Godino, J. B. (2016). Implicaciones de las relaciones entre Epistemología e Instrucción Matemática para el Desarrollo Curricular: el caso de la Combinatoria. *Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, ED*, 8.
- Gordon, C. (2019). *The Role of Formulas in Student's Solution Strategies in regard to Combinatorics*. Oregon State University. Oregon. USA.: Oregon State University. Recuperado el 12 de Febrero de 2020, de https://lr.library.oregonstate.edu/concern/honors_college_theses/g41mq13d
- Grimaldi, R. (2004). Fundamental principles of counting. En R. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied Introduction. Fifth edition* (págs. 3-46). Boston: Pearson education.
- Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemática Discreta. Sexta edición*. México: Pearson Education. ISBN 970-26-0637-3. México 2005.
- Loockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *journal of mathematical behavior* 32. (2013).(32), 251-265. doi:ng. journal of mathematical behavior 32. (2013). pp. 252-265. Journal homepag<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.008>.
- Loockwood, E. (2014). A set-oriented perspective on solving counting problems. *For the Learning of Mathematics-July 2014.*, 30-37. Recuperado el 3 de 10 de 2019, de <https://www.researchgate.net/publication/264239813>
- Mazario, T. I. (2009). Reflexiones sobre un tema polémico: La resolución de problemas. En Corporativo, *Estrategias de aprendizaje en la nueva universidad* (pág. 56). La Habana, La Habana, Cuba: Editorial Universitaria. Recuperado el 6 de Enero de 2020, de <https://libros.metabiblioteca.org>
- Meika I., S. D. (2018). Students' errors in solving combinatorics problems observed from the characteristics of RME modeling. *J. Phys.: Conf. Ser. 948 012060. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 948(2018) 012060 doi :10.1088/1742-6596/948/1/012060*.
- MES. (Mayo de 2017). *Plan E de Estudio Ingeniería Informática (CRD y CE)*. Universidad Tecnológica de la Habana "José Antonio Echeverría". CUJAE, La Habana. Recuperado el 12 de 04 de 2019
- MES. (2018). Resolución 2/2018. Trabajo Metodológico. *Gaceta oficial de la República de Cuba(25)*, 1-64. Recuperado el 10 de 02 de 2021, de <http://www.gacetaoficial.cu>
- MES. (Agosto de 2019). Plan E de estudio. Carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. La Habana, Cuba.
- Mneimneh S., N. A. (2017). Counting with Code. *Consortium for Computing Sciences in Colleges 2017*, 112-121. Obtenido de <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/3069658.3069675>



- Navarro-Pelayo, V. B. (12 de 03 de 1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 1(8), 26-39. Obtenido de <http://www.ugr.es/batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf>
- Quintana, Á. J., Díaz, B. T., & Rosete, S. A. (Abril-Junio de 2021). Procedimientos didácticos para aplicar conjuntos de resultados en el desarrollo de la habilidad resolver problemas combinatorios. *RCCI*, 15(2), 158-182. doi: <https://orcid.org/0000-0002-1073-9971>
- Rosen, K. (2014). *Discrete Mathematics and its Applications. Seventh edition.* . McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-338309-5. 2014 .