UCIENCIA.21
IV Conferencia Científica Internacional
Universidad de las Ciencias Informáticas

Temática: Matemática Computacional.

Comparación de métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales sobredeterminados en la diseminación de masa

Comparison of methods for solving overdetermined systems of linear equations in mass dissemination

Ilsen León Herrera [1*], Rene Martín Calañas[2] , Héctor Raúl González Diez [3]

[1] Universidad de las Ciencias Informáticas. Dirección postal. ilsen@uci.cu
[2] Universidad de las Ciencias Informáticas. Dirección postal. rmcalana@uci.cu
[3] Universidad de las Ciencias Informáticas. Dirección postal. hglez@uci.cu

[*] Autor para correspondencia: ilsen@uci.cu

Resumen

La diseminación en metrología puede definirse como la transferencia de los valores de exactitud de los patrones de determinada magnitud, a las mediciones de la red jerárquica de los calibrandos, manteniendo la trazabilidad de sus valores característicos. Para diseminar la magnitud de masa, se realiza una serie de comparaciones que pueden ser representadas mediante ecuaciones, generando una ecuación por cada comparación, donde resultan como incógnitas los valores de desviación de masa de las pesas con respecto a la pesa patrón involucrada. Si se agrupan todas estas ecuaciones se establece un sistema de ecuaciones, que en la mayoría de los casos resulta sobredeterminado, y se resuelve para encontrar los valores que satisfacen la serie de comparaciones dentro de ciertos criterios de ajuste. Esta investigación expone la comparación de dos métodos utilizados para resolver los problemas matemáticos generados en la subdivisión/multiplicación del kilogramo en el proceso de diseminación de masa. Se comparan los valores de desviación obtenidos por los métodos: Gauss Markov, utilizado actualmente en el Instituto Nacional de Metrología de Cuba y la propuesta del uso de algoritmos ADMM (Alternate Direction Method of Multipliers), específicamente el caso de la regresión lineal con regularización, también llamada Lasso, con ayuda del asistente matemático MATLAB. Los resultados obtenidos permiten comprender el uso pertinente de métodos novedosos en el proceso, asegurando elevar la exactitud en los resultados junto a una mayor rapidez de convergencia.

Palabras clave: diseminación de masa, MATLAB, método numérico, sistema de ecuaciones, sobredeterminado

Abstract
Dissemination in metrology can be defined as the transfer of the accuracy values of the standards of determined magnitude, to the measurements of the hierarchical network of the calibrators, maintaining the traceability of their characteristic values. To disseminate the mass magnitude, a series of comparisons is made that can be represented by equations, generating an equation for each comparison, where the mass deviation values of the weights with respect to the standard weight involved are unknowns. If all these equations are grouped together, a system of equations is established, which in most cases is overdetermined, and is solved to find the values that satisfy the series of comparisons within certain adjustment criteria. This research exposes the comparison of two methods used to solve the mathematical problems generated in the subdivision / multiplication of the kilogram in the mass dissemination process. The deviation values obtained by the methods are compared: Gauss Markov, currently used at the National Institute of Metrology of Cuba, and the proposed use of ADMM (Alternate Direction Method of Multipliers) algorithms, specifically the case of linear regression with regularization, also called Lasso, with the help of the MATLAB math wizard. The results obtained allow us to understand the pertinent use of novel methods in the process, ensuring increased accuracy in the results together with greater speed of convergence.

Keywords: *mass dissemination, MATLAB, numerical method, overdetermined, system of equations*

Introducción

La diseminación en metrología puede definirse como la transferencia de los valores de exactitud de los patrones de determinada magnitud, a las mediciones de la red jerárquica de los calibrandos, manteniendo la trazabilidad de sus valores característicos. La fundamentación de la diseminación se basa en la exactitud de las mediciones, la teoría del error, el método secuencial de las mediciones, así como la utilización de métodos matemáticos y estadísticos que validen el proceso de transferencia. El proceso de diseminación de masa es complejo desde su comienzo (Martínez-Escanaverino, 2000). Sin embargo, a nivel internacional existen publicados conocimientos fraccionados referidos a dicho procedimiento (Becerra and Nava, 2004; Bich, 1990; Bich et al., 1994; Cori, 2012; Cox et al., 2003; Nielsen, 1998; Ramírez and Becerra, 2007).

De la unidad de masa depende la formación de magnitudes derivadas como la fuerza, la presión, la energía, entre otras; en consecuencia, el nivel de exactitud con la que se mide afecta la precisión en otras magnitudes. Para generar la escala de masa en la calibración de pesas de los diferentes valores nominales, desde 1 mg a 1 t o mayores, se requiere comparar pesas que en su conjunto formen el mismo valor nominal con respecto a una pesa llamada patrón. Una pesa patrón está caracterizada por su exactitud a partir de una denominación de clase y acompañada de una certificación de calidad (Grupo IPC, 2018; Roberto et al., 2004). El empleo de un modelo de subdivisión/multiplicación, consiste en la realización de una serie de comparaciones que a su vez genera un número igual de ecuaciones, donde las incógnitas son los valores de desviación de masa de las pesas (a excepción de la pesa patrón involucrada). El sistema de ecuaciones, que en la mayoría de los casos resulta sobredeterminado, se resuelve para encontrar estos valores que satisfacen la serie de comparaciones dentro de ciertos criterios de ajuste.

Según la bibliografía especializada en el tema de metrología, es posible encontrar un número considerable de métodos matemáticos propuestos para realizar el proceso de diseminación de masa (Ramírez and Becerra, 2007). Dentro de los más utilizados, se encuentran: el método de Mínimos Cuadrados (Cuadras, 2014), los enfoques de Gauss-Márkov, Lagrange (Lautaro et al., 2008) y Monte Carlo (Cox et al., 2003). Cada método de cálculo de diseminación de masa, tiene distintas variantes de operación, elegir una es habilidad del investigador. La conformación del modelo admite configuraciones adicionales basadas en la repetición de algunas de las ecuaciones, donde el modelo resultante es producto de un esquema nombrado: esquema de pesada, que conlleva al compromiso tiempo-covarianza. La utilización de medios de computo puede contribuir a la conformación de esquemas de pesadas ajustados a las necesidades de la calibración.

En la presente investigación se establece una comparación entre el método de Gauss Markov y el algoritmo de regresión lineal con regularización que emplea métodos de dirección alterna utilizando multiplicadores, propuesto por Stephen P. Boyd en (S Boyd et al., 2012) para resolver este tipo de problemas. Finalmente se mostrarán los resultados al calibrar una década de pesas mediante ambos métodos comparando los valores de desviación obtenidos. La comparación, una vez realizada, permitirá decidir la inclusión novedosa de este algoritmo en el proceso de diseminación de masa que se efectúa en el INIMET.

Diseminación de masa

Pesar significa determinar la masa desconocida de un cuerpo (T) con el auxilio de un instrumento de medición, mediante la comparación de su peso con el peso de otro cuerpo que sirve de referencia (R), cuya masa se conoce con determinada exactitud, en presencia de la acción de la gravedad sobre ambos cuerpos. Diseminar la unidad de masa, significa transferir el valor de masa del prototipo internacional del kilogramo hasta los instrumentos ordinarios, a través de una cadena ininterrumpida de comparaciones.

Parámetros en la medición

La fórmula (1) se toma como base cuando se comparan dos masas en una balanza, basado en que se igualan las masas de dos cuerpos cuando ellos ejercen el mismo peso bajo la misma aceleración de la gravedad (esto es, en el mismo lugar). Sin embargo, esto sólo es cierto si la pesada se realiza en el vacío. Normalmente se pesa en el aire y, por lo tanto, el equilibrio ocurre entre la resultante del peso de los cuerpos y la fuerza de empuje del aire sobre cada uno de ellos.

$$I_L \cdot (m_1 \cdot g_{loc} - V_1 \cdot \rho_a \cdot g_{loc}) = I_R \cdot (m_2 \cdot g_{loc} - V_2 \cdot \rho_a \cdot g_{loc}) \quad (1)$$

donde:

- m_1 y m_2: Masas de los cuerpos 1 y 2
- V_1 y V_2: Volumen de los cuerpos 1 y 2
- g_{loc}: Aceleración local de la gravedad
- I_L, I_R: Longitud de los brazos de la balanza (izquierdo y derecho)
- ρ_a: Densidad del aire durante la pesada

En general, cuando se compara un cuerpo cuya masa se desea determinar con un patrón de masa conocida, y se determina la diferencia que existe entre sus pesos mediante una balanza, resulta la siguiente ecuación para determinar la masa:

$$m_2 = m_p + \rho_a (V_2 - V_p) + \Delta W \quad (2)$$

donde el subíndice "p" designa al patrón y ΔW es la diferencia entre el peso de ambos cuerpos determinada mediante la balanza. La densidad del aire se determina mediante la expresión:

$$\rho_a = 0{,}348444 \cdot P - \frac{H(0{,}00252t - 0{,}020282)}{273{,}15 + 1} \quad (3)$$

donde P, H y t son los valores medidos de la presión barométrica, la humedad relativa y la temperatura del aire en el momento de la medición.

Esquemas de subdivisión y multiplicación (ESM)

La comparación consiste en aplicar los esquemas de subdivisión (descendiendo hacia los submúltiplos) o multiplicación (ascendiendo hacia los múltiplos) de 1 kg. Un ejemplo de esquema de subdivisión puede ser el que se muestra en la Tabla 1 con 5 patrones desconocidos y 5 comparaciones de masa en la década de 1 kg a 100 g:

Tabla 1. Esquema de pesada

	1kg	**500g**	**200g**	**200g***	**100g**	**100g***
1	1	-1	-1	-1	-1	0
2	0	1	-1	-1	-1	0
3	0	0	1	-1	0	0
4	0	0	1	0	-1	-1
5	0	0	0	0	1	-1

donde:

-1 y 1: significan la presencia de la pesa en la ecuación, y el signo denota la posición en cada plato de la balanza

0: la no participación de la pesa en la ecuación.

Partiendo de que la desviación de la masa de 1 kg es un valor conocido(pesa patrón) y que se desconoce el resto de las desviaciones de masas de las pesas que participan, el esquema conforma un sistema de ecuaciones lineales con 5 ecuaciones y cinco incógnitas, cuya solución corresponde precisamente a los valores de las desviaciones desconocidas.

Es importante tener en cuenta, como otro factor fundamental, la incertidumbre de dicha desviación, que especifica un intervalo de valores con límites positivo y negativos simétricos alrededor de la desviación, dentro del cual es probable encontrarla cada vez que se repita su determinación. Para que una pesa pueda ser certificada y clasificada es imprescindible que la desviación con respecto a su valor nominal no exceda de los valores máximos permisibles especificados y que la incertidumbre en la determinación del valor de masa no exceda de 1/3 de los valores definidos.

Modelo matemático

El modelo matemático, que consiste en un sistema de ecuaciones sobredeterminado, se obtiene a partir del establecimiento de valores nominales para las pesas. Los valores nominales permiten establecer series de comparaciones que se representan mediante ecuaciones. En el sistema de ecuaciones definido en forma matricial, la matriz de coeficientes A tiene dimensiones mxn con m>n, sin considerar la posibilidad de repetir varias veces las ecuaciones para obtener resultados más confiables.

Mínimos cuadrados Ordinarios

El método de Mínimos Cuadrados permite convertir el sistema sobredeterminado en un sistema determinado, minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores obtenidos y los valores de entrada.
Para este método se considera el modelo lineal general:

$$Y = X\hat{\beta} + \varepsilon \quad (4)$$

donde:

ε es el error,
β es el mejor estimado del modelo lineal y
X es la matriz de diseño,
Y es la matriz columna que se obtiene de la siguiente ecuación (5):

$$y_i = \Delta m_i + p_{ai}(V_p - V_x)_i \quad (5)$$

Es importante destacar que dentro de los supuestos de método se encuentran: la linealidad, esperanza nula, insesgadez y ausencia de autocorrelación. El sistema que se obtiene al aplicar mínimos cuadrados está compuesto por un conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones normales que se obtienen del proceso matricial:

$$-X^T Y + X^T X\beta = 0 \leftrightarrow X^T X\beta = X^T Y \leftrightarrow M\beta = Y \quad (6)$$

El sistema normal resultante quedará determinado de orden n, por lo que el mismo tendrá solución única si el rango de M es igual a n. La solución empleando la regla de Cramer puede escribirse como:

$$\beta = M^{-1}Y = [X^T X]^{-1} X^T Y = LY \quad (7)$$

donde la matriz L suele llamarse pseudo inversa y el costo de encontrarla computacionalmente puede resultar elevado. Es por ello que la implementación de este método quedó implícita en los métodos utilizados en la literatura para resolver SEL.

Enfoque de Gauss-Markov

En el sistema de ecuaciones anterior, donde solo figuran las comparaciones en un sistema singular, se hace necesario agregar la información correspondiente a la desviación del patrón a utilizar. Existen varios enfoques de cómo tratar el problema. Gauss-Markov incluye esta restricción como una ecuación más del modelo inicial, a diferencia del enfoque de los multiplicadores de Lagrange que lo sitúa en las ecuaciones normales posterior a aplicar Mínimos cuadrados condicionando la propiedad de matriz de coeficientes cuadrada.

Ponderación

Con el objetivo de minimizar la incertidumbre se realiza la ponderación de cada ecuación. Dicho artificio está relacionado con la importancia matemática en la función de algún parámetro, generalmente estadístico, que se le confiere dentro del sistema de ecuaciones antes de resolverlo. En el enfoque de Gauss-Markov no es posible determinar un factor de normalización y para generar la matriz W de ponderación se toman las incertidumbres combinadas (k=1) respectivas a cada ecuación, queda descrito en las ecuaciones (8) y (9) como:

$$W_u = {u_i}^2 \qquad i = 1 \ldots n \quad (8)$$

$$W_{n+1,n+1} = {u_\sigma}^2 \quad (9)$$

Para finalmente realizar las siguientes operaciones:

$$W^{-1}X\beta = W^{-1}Y \rightarrow X^T W^{-1} X\beta = X^T W^{-1} Y \rightarrow \beta = (X^T W^{-1} X)^{-1} X^T W^{-1} Y \quad (10)$$

Utilizando el asistente MATLAB es posible resolver el sistema mediante el método de escalonamiento de la matriz por lo que se propone realizar las operaciones con el operador mldivide, (\):

$$x = A\backslash B$$
$$x = \text{mldivide}(A,B)$$

donde:

A: $(X^T W^{-1} X)$,
B: $(X^T W^{-1} Y)$
x: el vector β de desviaciones.

El uso del operador mldivide se encarga primero de encontrar las matrices escalonadas L y U, donde LU=A para luego resolver el sistema:

$$L\varphi = C$$
$$UB = \varphi$$

donde:

φ: variable de sustitución

Lasso

El modelo de regresión lineal ℓ_1 con regularización tipo Lasso, descrita en (Stephen Boyd et al., 2011), implica resolver un problema de optimización en la forma:

$$\min\ (1/2)\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \quad (11)$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro de regularización escalar que normalmente se elige mediante validación cruzada.

El objetivo de la regresión es encontrar un modelo parsimonioso para los datos. Utilizando ADMM, el problema del Lasso se puede escribir como:

$$\text{minimizar } f(x) + g(z) \quad (12)$$

$$\text{sujeto a } x - z = 0 \quad (13)$$

donde $f(x) = (1/2)\|Ax - b\|_2^2$ y $g(z) = \lambda\|z\|_1$ se transforma en:

$$x^{k+1} := (A^T A + \rho I)^{-1}(A^T b + \rho(z^k - u^k))$$

$$z^{k+1} := S_{\lambda/\rho}(x^{k+1} - u^k))$$
$$u^{k+1} := (u^k - x^{k+1} - z^{k+1}) \quad (16)$$

Se conoce que $A^T A + \rho I$ es siempre inversible, ya que $\rho > 0$. La actualización x es esencialmente un cálculo de regresión de cresta (es decir, mínimos cuadrados regularizados cuadráticamente), por lo que ADMM puede ser interpretado como un método para resolver el problema del Lasso llevando a cabo la regresión de cresta de forma iterativa. Cuando se utiliza un método directo, es posible almacenar en caché una factorización inicial para que las iteraciones posteriores sean computacionalmente mucho menos costosas.

Resultados y discusión

En esta investigación se establecen los resultados obtenidos al resolver el sistema generado de 14 ecuaciones para múltiplos en la década (10, 5, 2, 2, 1, P) kg. El esquema de repetición es el siguiente $G^T = [1,0,1,0,3,2,0,2,0,3,2]$. Se obtiene la siguiente matriz de diseño:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Los datos del patrón para este caso se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Desviación e incertidumbre del patrón

Desviación (mg)	**Incertidumbre k=1 (mg)**
0.202	0.030

Los valores de Y finales se muestran en la Tabla 3:

Tabla 3. Valores finales

Ec.	Y(mg)	U(mg)
1	6.41	0.34
2	3.72	0.38
3	0.25	0.21
4	0.34	0.25
5	0.18	0.27
6	1.12	0.30
7	1.06	0.32
8	1.53	0.35
9	1.74	0.33
10	-1.20	0.27
11	-1.14	0.20
12	-1.27	0.28
13	-0.37	0.24
14	-0.25	0.18

Obteniéndose como diseño final al agregar la restricción del patrón:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad y_o = \begin{vmatrix} 6.41 \\ 3.72 \\ 0.25 \\ 0.34 \\ 0.18 \\ 1.12 \\ 1.06 \\ 1.53 \\ 1.74 \\ -1.20 \\ -1.14 \\ -1.27 \\ -0.37 \\ -0.25 \\ 0.202 \end{vmatrix}$$

La matriz ponderada para este caso se conforma según la ecuación (9):

$$W = \begin{vmatrix} 0.116 \\ 0.144 \\ 0.044 \\ 0.063 \\ 0.073 \\ 0.090 \\ 0.102 \\ 0.122 \\ 0.109 \\ 0.073 \\ 0.040 \\ 0.078 \\ 0.058 \\ 0.032 \\ 0.001 \end{vmatrix} * I$$

donde:

$\boldsymbol{I}$ es la matriz de identidad.

Finalmente es posible aplicar los dos métodos que tiene como objetivo analizar la presente investigación. En $\boldsymbol{\beta}_{1,}$ se representa el resultado de desviación para cada una de las pesas al aplicar el enfoque de Gauss-Markov:

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} 9.1480 \\ 3.2290 \\ 0.3534 \\ -1.0464 \\ -0.0840 \\ 0.2020 \end{vmatrix}$$

Por otra parte, si se aplica Lasso donde $\boldsymbol{A}$ sería la matriz de coeficientes ponderada $\boldsymbol{W^{-1}X_o}$ y $\boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{W^{-1}Y_o}$

donde:

$\boldsymbol{Xo}$: el esquema de pesada con la restricción del patrón incorporada

$\boldsymbol{Yo}$: el vector de desviaciones de las pesadas junto a la desviación del patrón incluido.

Los resultados obtenidos para $\boldsymbol{\beta}$, con una cantidad de 5 iteraciones, una tolerancia de error absoluto y relativo de 1e-8 y 1e-8 respectivamente, son reflejados en $\boldsymbol{\beta}_2$:

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} 9.19799080581532 \\ 3.25259460286892 \\ 0.370410518979767 \\ -1.03566721598269 \\ -0.0774608516907878 \\ 0.201998499999949 \end{vmatrix}$$

Dicho método se ejecutó en un tiempo de 0.025096 segundos, demostrando una razón de convergencia elevada, como se evidencia en las Figuras 1, 2 y 3.

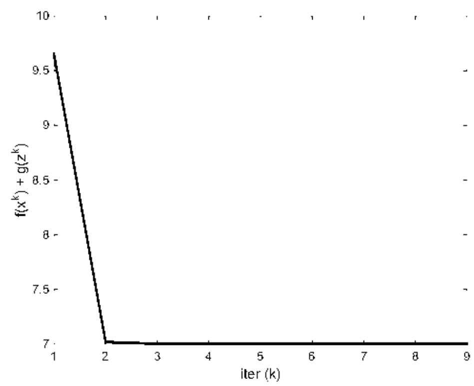

Figura 1. f(x) + g(z) para la iteración k

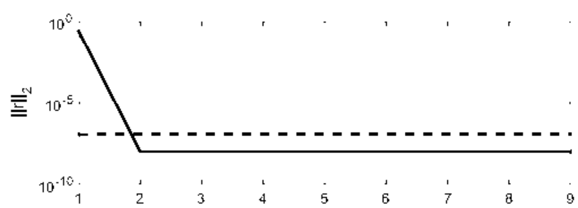

Figura. 2. Norma 2 de r ($\|r\|_2$) para cada iteración k

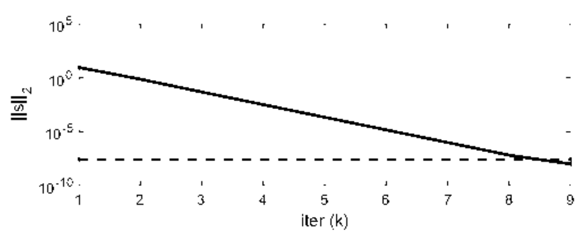

Figura. 3. Norma 2 de s($\|s\|_2$) para cada iteración k

En la tabla 4 se ilustra una comparación realizada de los valores de desviación en cuanto al error donde se demuestra la validez de la variante al utilizar Lasso en el proceso de diseminación de masa.

Tabla 4. Comparación de la aplicación de los métodos en cuanto al error

Métodos	**Gauss-Markov**	**Lasso**
Desviación 1	9.1480	9.1979908581532
Desviación 2	3.2290	3.2529460286892
Desviación 3	0,3534	0.370410518979767
Desviación 4	-1.0464	-1.03566721598269
error	0.1557	1e-8 (ajustable)

Conclusiones

La investigación realizada permitió asegurar el funcionamiento de métodos de optimización numérica aplicados al campo de la diseminación de masa, la introducción del método de Lasso aplicado a este modelo conduce a la posibilidad de obtener resultados más precisos con operaciones computacionalmente menos costosas.

La utilización de medios de computo a partir de algoritmos desarrollados puede facilitar la generación de esquemas de pesadas condicionados a las necesidades de la calibración, aumentando la exactitud de los resultados.

El método de Lasso recibe, al igual que el enfoque de Gauss-Markov, la matriz de diseño ponderada y converge rápidamente a los resultados.

Se debe comparar de igual manera la efectividad de Lasso con otros métodos utilizados en la práctica a nivel internacional, se propone realizar estudios sobre este tema en próximos artículos.

Referencias

Becerra, L. O. and Nava, J. (2004). Incertidumbre en la calibración de pesas por el método ABBA. *Centro Nacional de Metrología, México*.

Bich, W. (1990). Variances, covariances and restraints in mass metrology. *Metrologia*, *27*(3), 111.

Bich, W., Cox, M. G. and Harris, P. M. (1994). Uncertainty modelling in mass comparisons. *Metrologia*, *30*(5), 495.

Boyd, S, Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. (2012). Matlab scripts for alternating direction method of multipliers. *Technical Report*, *Technical Report*.

Boyd, Stephen, Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. (2011). *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers*. *3*(1), 1–122. https://doi.org/10.1561/2200000016

Cori, L. A. (2012). *Diseminación de masas de alta ecactitud por el método de Gauss-Markov desde 1mg hasta 1kg*.

Cox, M., Harris, P. and Siebert, B.-L. (2003). Evaluation of measurement uncertainty based on the propagation of distributions using Monte Carlo simulation. *Measurement Techniques*, *46*(9), 824–833.

Cuadras, C. M. (2014). *Nuevos métodos de análisis multivariante. Barcelona, España: CMC Editions*.

Grupo IPC. (2018). *Pesas patrón*. http://www.ipc.com.mx/pai-masas-y-pesas-patron.html

Lautaro, J., Luis, O. and Luis, M. (2008). *Comparación de los Métodos Utilizados para la Diseminación de los Patrones de Masa de Alta Exactitud y Validación de la Incertidumbre Estimada Mediante Simulación Numérica*. *2*, 1–9.

Martínez-Escanaverino, J. (2000). Dichromatic Graphs: A Tool for the Algorithmic Education of Mechanical Engineers in ASME Design Engineering Technical Conferences & computers and Information in Engineering, DETC 2000. *Baltimore, Maryland: Amer Society of Mechanical*.

Nielsen, L. (1998). Least-squares estimation using Lagrange multipliers. *Metrologia*, *35*(2), 115.

Ramírez, L. J. and Becerra, L. O. (2007). *LM Peña--Informe sobre el estudio de los diferentes métodos de calibración de los submúltiplos del kilogramo--Proyecto del programa SIDEPRO*. Jun.

Roberto, L., Marcelo, S. A. and Alves, L. (2004). *CALIFICACIÓN METROLÓGICA DE PESAS PATRÓN*

SEGUN OIML R 111. 1–6.