UCIENCIA.21
IV Conferencia Científica Internacional
Universidad de las Ciencias Informáticas

Temática: IV Taller internacional de Enseñanza de las Ciencias Informáticas.

Propuesta metodológica para el análisis de los extremos de funciones de dos variables

Methodological proposal for the analysis of the extrema of functions of two variables.

Fernando Rodríguez Marzo*, Abel Velazquez Pratts [2], Hector Raúl Gonzalez Diez [3]

[1] Universidad de las Ciencias Informáticas. frmarzo@uci.cu
[2] Universidad de las Ciencias Informáticas. abelv@uci.cu
[3] Universidad de las Ciencias Informáticas. hglez@uci.cu

* Autor para correspondencia: frmarzo@uci.cu

Resumen
El tema de extremos locales de funciones de una y varias variables, y su aplicación consecuente a la resolución de problemas de optimización, constituye uno de los principales objetivos de la disciplina matemática para la formación de los ingenieros informáticos. En el enfoque tradicional el procedimiento que se establece para clasificar los puntos críticos de funciones de una variable real se hace a través de dos criterios fundamentalmente: Criterio de la primera derivada y Criterio de la segunda derivada. Sin embargo, al tratar este mismo tema para funciones de dos variables, el análisis se hace, a través de un sólo criterio: Criterio del Hessiano. Este criterio tiene como fundamento conocimientos que no pertenecen al currículo de la disciplina matemática para el ingeniero informático. El objetivo de este trabajo es hacer una valoración, desde el punto de vista metodológico, del proceso de clasificación de los puntos críticos en extremos locales y proponer una estrategia metodológica para abordar este tema en la cual esté presente las derivadas de primer orden, las curvas de nivel. Como herramienta fundamental se propone el uso del software MATLAB.

Palabras clave: extremos locales, curvas de nivel, derivadas dirigidas.

Abstract
The subject of local extrema of functions of one and several variables, and its consequent application to the resolution of optimization problems, constitutes one of the main objectives of the mathematical discipline for the training of computer engineers. In the traditional approach the procedure established to classify the critical points of functions of a real variable is done through two criteria fundamentally: Criterion of the first derivative and Criterion of the second derivative. However, when dealing with this same subject for functions of two variables, the analysis is done through a single criterion: Hessian criterion. This criterion is based on knowledge that does not belong to the

curriculum of the mathematical discipline for the computer engineer. The objective of this work is to make an evaluation, from the methodological point of view, of the process of classification of the critical points in local extremes and to propose a methodological strategy to approach this subject in which the first order derivatives, the level curves, are present. The use of MATLAB software is proposed as a fundamental tool.

Keywords: *local extremes, contour lines, directed derivative*

Introducción

El tema de extremos locales de funciones de una y varias variables, y su aplicación consecuente a la resolución de problemas de optimización, constituye uno de los principales objetivos de la disciplina matemática para la formación de los ingenieros. En el caso de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas (ICI) este tema es tratado en la asignatura Matemática I y luego en la asignatura Matemática II, estudiando las funciones de una variable real y las funciones de varias variables reales, respectivamente.

En la enseñanza tradicional, la clasificación de los puntos críticos como extremos locales de las **funciones de una variable real,** se realiza fundamentalmente a través de dos criterios. Un criterio se basa en el análisis de la derivada de 1er orden de la función y el otro en se basa en la derivada de 2do orden. Estos criterios tienen una interpretación geométrica relativamente sencilla. Uno se relaciona con la monotonía de la curva que representa a la función y el otro con la concavidad de dicha curva. Esto facilita la comprensión de los criterios debido a la visualización que se puede establecer en estos casos.

En el caso de las funciones de dos variables, el análisis se hace a través del criterio conocido por algunos autores como el criterio del Hessiano. Este criterio se basa en la aplicación de la fórmula de Taylor a la función que se analiza en el posible punto de extremo local. Esto conlleva al estudio de una forma cuadrática. Tanto la fórmula de Taylor para funciones de varias variables como las formas cuadráticas no pertenecen al sistema de conocimientos de la disciplina Matemática correspondiente al plan de estudio de esta carrera. Esto provoca que los estudiantes se vean obligados a memorizar un teorema sin conocer el fundamento matemático del mismo, contribuyendo de esta manera a un aprendizaje memorístico y no significativo según D. Ausubel (1976).

A partir de lo expresado anteriormente los autores identifican el siguiente **problema**: *¿Cómo contribuir a la conceptualización de los extremos locales de funciones de dos variables utilizando elementos teóricos* *correspondientes a la disciplina Matemática de la carrera ICI con el apoyo de las TICs?* En este caso los autores se proponen como **objetivo fundamental:**

proponer una estrategia metodológica para abordar este tema en la cual esté presente las derivadas de primer orden y las curvas de nivel. Como herramienta fundamental se propone el uso del software MATLAB, por las potencialidades gráficas y numéricas que posee, el cual permitirá el trabajo en los diferentes registros de representación (gráfico, algebraico y numérico) de la función en estudio, favoreciendo de esta manera el aprendizaje.

Materiales y métodos

La idea central de la estrategia metodológica que se propone en este trabajo es primeramente, estudiar el comportamiento de las curvas de nivel alrededor de los puntos críticos con el objetivo de poder tener una idea de la clasificación de dichos puntos en extremos locales. Luego estudiar el comportamiento de la función a través del análisis de la monotonía para todas las direcciones que parten del punto crítico (x_0, y_0), lo cual conllevaría al análisis de una función de una variable, algo que es del dominio del estudiante. Antes de pasar a describir la propuesta expondremos algunos resultados teóricos.

<u>Definición de extremos locales de función de dos variables</u>

Sea una función $z = f(x,y)$ definida en un dominio D y sea que el punto $M_O(x_o,y_o)$es un punto interior de este dominio. Si existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los Δx y Δy que satisfacen las condiciones $|\Delta x| < \delta$ y $|\Delta y| < \delta$ es válida la desigualdad

$$\Delta f(x_o,y_o) = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o,y_o) \leq 0,$$

entonces el punto $M_O(x_o,y_o)$ se denomina punto de **máximo local** de la función $f(x,y)$; si para todos los Δx, Δy que satisfacen las condiciones $|\Delta x| < \delta$ y $|\Delta y| < \delta$,

$$\Delta f(x_o,y_o) = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o,y_o) \geq 0,$$

entonces el punto $M_O(x_o,y_o)$ se denomina punto de **mínimo local**.

Interpretación algebraica de los extremos locales de una función z = f (x, y)

Desde el punto de vista algebraico, si $f(x,y)$ es una función definida y continua en una vecindad del punto (x_o,y_o) se puede interpretar la definición de máximo local como que para cualquier $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño existirá una vecindad del punto (x_o,y_o) tal que la ecuación

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) + \varepsilon$$

no tiene solución dentro de dicha vecindad y sin embargo la ecuación

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) - \varepsilon$$

sí tendrá soluciones en dicha vecindad.

De forma análoga para el caso de los puntos de mínimo local ocurrirá que para cualquier $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño existirá una vecindad del punto (x_o,y_o) tal que la ecuación

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) + \varepsilon$$

tiene solución dentro de dicha vecindad y sin embargo la ecuación

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) - \varepsilon$$

no tendrá soluciones en dicha vecindad.

En el caso de que para cualquier $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño exista una vecindad del punto (x_o,y_o) tal que ambas ecuaciones

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) + \varepsilon$$

$$f(x,y) = f(x_o,y_o) - \varepsilon$$

Tengan soluciones entonces el punto (x_o,y_o) no será un punto de extremo local.

Curvas de nivel

Se denomina curvas de nivel al conjunto de los puntos del plano xOy en los que la función $z = f(x,y)$ toma el valor constante dada $z = c$. Se puede obtener esta curva cortando la superficie *z* = *f(x, y)* por el plano $z = c$ paralelo al plano xOy y proyectando ortogonalmente la línea de intersección sobre el plano xOy.

Desde el punto de vista geométrico, la definición de máximo local se puede interpretar que en cualquier vecindad del punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, la superficie $z = f(x, y)$ está totalmente por debajo del plano $z = f(x_o, y_o)$, o sea, que para valores de k tales que $k \leq f(x_o, y_o)$ y muy cercano a $f(x_o, y_o)$ existirán curvas de nivel de la forma $f(x_o, y_o) = k$ muy cercanas al punto (x_o, y_o). Sin embargo, si tomamos valores $k \geq f(x_o, y_o)$ entonces no existirán curvas de nivel de la forma $f(x_o, y_o) = k$ muy cercanas al punto (x_o, y_o).

Un razonamiento análogo se puede hacer para el caso de los puntos de mínimo local. En ese caso ocurrirá que en cualquier vecindad del punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, la superficie $z = f(x, y)$ está totalmente por encima del plano $z = f(x_o, y_o)$, o sea, que para valores de k tales que $k \geq f(x_o, y_o)$ y muy cercano a $f(x_o, y_o)$ existirán curvas de nivel de la forma $f(x_o, y_o) = k$ muy cercanas al punto (x_o, y_o). Sin embargo, si tomamos valores $k \leq f(x_o, y_o)$ entonces no existirán curvas de nivel de la forma $f(x_o, y_o) = k$ muy cercanas al punto (x_o, y_o).

Ejemplo 1: A partir del razonamiento anterior procederemos a analizar la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

en una vecindad del punto crítico (0, 0).

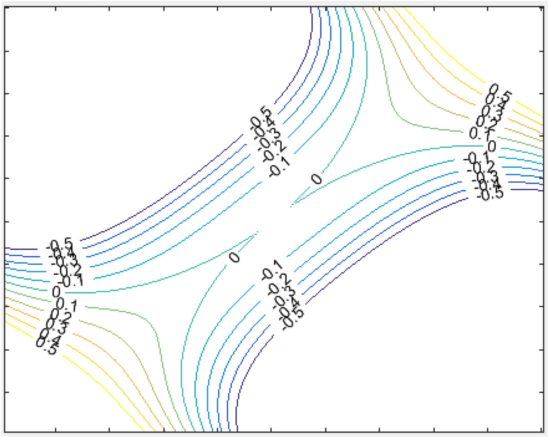
Utilizando el MATLAB para graficar las curvas de nivel de la forma

$$f(x, y) = f(x_o, y_o) + \varepsilon$$

o sea

$$f(x, y) = \varepsilon$$

para valores de ε cada vez más cercanos a cero, tanto positivos como negativos se obtienen curvas de nivel cercanas al punto (0,0);



El gráfico anterior nos sugiere que el punto crítico no debe ser un extremo local pues existen curvas de nivel que se encuentran cercanas al punto crítico para valores positivos y valores negativos de ε.

Si nos centramos en el registro numérico, analizando los valores de la función en la vencindad del punto crítico podemos observar, que, aunque la gran mayoría de los valores son negativos también existen valores positivos lo cual indica que la función no alcanza un extremo local en el punto crítico analizado.

f =

0.1250	0.0681	-0.0094	-0.1159	-0.2574	-0.4375	-0.6574	-0.9159	-1.2094	-1.5319	-1.8750
0.0681	0.0512	0.0137	-0.0528	-0.1543	-0.2944	-0.4743	-0.6928	-0.9463	-1.2288	-1.5319
-0.0094	0.0137	0.0162	-0.0103	-0.0718	-0.1719	-0.3118	-0.4903	-0.7038	-0.9463	-1.2094
-0.1159	-0.0528	-0.0103	0.0032	-0.0183	-0.0784	-0.1783	-0.3168	-0.4903	-0.6928	-0.9159
-0.2574	-0.1543	-0.0718	-0.0183	0.0002	-0.0199	-0.0798	-0.1783	-0.3118	-0.4743	-0.6574
-0.4375	-0.2944	-0.1719	-0.0784	-0.0199	0	-0.0199	-0.0784	-0.1719	-0.2944	-0.4375
-0.6574	-0.4743	-0.3118	-0.1783	-0.0798	-0.0199	0.0002	-0.0183	-0.0718	-0.1543	-0.2574
-0.9159	-0.6928	-0.4903	-0.3168	-0.1783	-0.0784	-0.0183	0.0032	-0.0103	-0.0528	-0.1159
-1.2094	-0.9463	-0.7038	-0.4903	-0.3118	-0.1719	-0.0718	-0.0103	0.0162	0.0137	-0.0094
-1.5319	-1.2288	-0.9463	-0.6928	-0.4743	-0.2944	-0.1543	-0.0528	0.0137	0.0512	0.0681
-1.8750	-1.5319	-1.2094	-0.9159	-0.6574	-0.4375	-0.2574	-0.1159	-0.0094	0.0681	0.1250

Ejemplo 2

Analizaremos el problema anterior, pero ahora estudiando el comportamiento de la función a través de las semirrectas que pasan por el punto (0, 0). Las ecuaciones paramétricas que describen dichas semirrectas cuyo punto inicial es el punto (0,0) vienen dadas por

$$x = t\cos(\theta)$$

$$y = t\sin(\theta) \quad t \geq 0 \;, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La función $f(x, y)$ sobre cada semirrecta quedaría definida de la siguiente forma

$g_\theta(t) = t^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + 2t^2(\sin(2\theta) - 1)$

Calculando la derivada respecto a la variable t obtenemos

$g'_\theta(t) = 4t^3(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + 4t(\sin(2\theta) - 1)$

Observemos que para $t = 0$ la derivada se anula, esto era de esperar pues cuando $t = 0$ se obtiene el punto (0,0) del cual dijimos inicialmente es un punto estacionario.

Sacando factor común a la variable t obtenemos

$g'_\theta(t) = 4t(t^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + 4(\sin(2\theta) - 1))$

De donde el signo de $g'_\theta(t)$ estará determinado por el factor $t^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + 4(\sin(2\theta) - 1)$ el cual denotaremos como $h_\theta(t)$, es decir, $h_\theta(t) = t^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + 4(\sin(2\theta) - 1)$

Tomando el límite cuando $t \to 0$ obtenemos

$\lim_{t \to 0} h_\theta(t) = 4(\sin(2\theta) - 1)$

Debido a la continuidad de esta función $h_\theta(t)$ existirá una vecindad $(0, \delta)$ tal que para $t \in (0, \delta)$ ella mantendrá el mismo signo que su límite, es decir, $h_\theta(t)$ tendrá el mismo signo que la función $4(\sin(2\theta) - 1)$ la cual es siempre negativa para todo valor de θ, excepto $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$ donde se anula la función $4(\sin(2\theta) - 1)$.

Por el análisis hecho hasta ahora podemos asegurar que la función $g_\theta(t)$ es siempre decreciente para cualquier valor de θ excepto $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$ .Veamos que sucede para cada uno de estos casos.

$g_{\frac{\pi}{4}}(t) = t^4(\cos^4(\frac{\pi}{4}) + \sin^4(\frac{\pi}{4})) + 2t^2(\sin(2\frac{\pi}{4}) - 1)$

$g_{\frac{\pi}{4}}(t) = t^4((\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^4)$

$g_{\frac{\pi}{4}}(t) = \frac{1}{2}t^4$

Debido a que esta última función es creciente para $t \geq 0$ podemos concluir el punto (0,0) no es extremo local debido a que hemos encontrado trayectorias que contienen el punto (0,0) en la que la función $f(x, y)$ decrece y otra por donde la función $f(x, y)$ crece.

Conclusiones

El fundamento teórico del teorema de Hessiano, polinomio de Taylor de 2do grado para funciones de dos variables y análisis de formas cuadráticas, no pertenecen al currículo de la disciplina matemática para el ingeniero en ciencias informáticas en Cuba. Esto hace que haya que memorizar las fórmulas que aparecen en el teorema sin una comprensión de las mismas, lo cual conlleva a un aprendizaje memorístico en contraposición de un aprendizaje significativo. De aquí que nos propusimos buscar un procedimiento para la enseñanza de este tema que dependiera exclusivamente de conocimientos del currículo de la carrera Ingeniería en ciencias informática y que además estuviera apoyado mediante un asistente matemático.

Desde el punto de vista didáctico la propuesta que se hace en este trabajo permite por un lado la exploración, visualización, interacción, etc. de los estudiantes; por otro lado, permite el análisis de los puntos críticos a través de conocimientos previos del estudiante.

Referencias

Ausubel, D. P. (1976). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo, México: Trillas.

Guzmán, M. d. (2005). Textos de Miguel de Guzmán

M.Krasnov (1990). Curso de Matemáticas superiores para ingenieros.

Stewart, J. (2012). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. Séptima edición.