Universidad de la Habana

Facultad de Matemática y Computación

Metodología para tipificar errores en el aprendizaje de la Matemática I en la Universidad de las Ciencias Informáticas

Tesis presentada en opción al título académico de Máster en Ciencias Matemáticas en la mención de Enseñanza de la Matemática

Autor: Ing. Pedro Alvarez Barreras

Tutora: Msc. María del Carmen Rivalta Valladares

La Habana

Septiembre de 2018

“Mis discípulos tendrán una plena libertad de discutir, y proponer sus pensamientos del modo que cada uno pueda. La emulación rara vez llega a ser racional, y por lo regular degenera en un encubrimiento de pasiones despreciables. Ella no entrará en mis clases, si yo no soy muy desgraciado. Entre nosotros nadie sabe, y todos aspiramos a saber. Los conocimientos son bienes comunes, y los errores no son defectos mientras no se sostienen con temeridad.”[1]

Félix Varela

[1] Tomado de la lección preliminar a sus discípulos por el presbítero Don Félix Varela, al empezar el estudio de la Filosofía, en el Real Colegio de San Carlos de la Habana, el día 30 de marzo de 1818

DEDICATORIA

Dedico esta modesta investigación al Doctor en Ciencias Militares, profesor Titular y Profesor Consultante de la Academia Superior de las FAR, Teniente Coronel. Pedro Ramón Benigno Álvarez Rodríguez, mi padre.

AGRADECIMIENTO

Todo mi agradecimiento para la Master en Ciencias, y profesora Auxiliar de la Universidad de la Habana. María del Carmen Rivalta Valladares, mi tutora.

SÍNTESIS

La presente investigación constituye un acercamiento teórico práctico a los errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad de las Ciencias Informáticas. En la misma se propone una tipificación de errores y una metodología para ponerla en práctica, que se adecua al Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la asignatura Matemática I en la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas. También es objetivo de esta investigación mostrar la importancia que para los profesores representa, la identificación y tipificación de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas para facilitar su posterior tratamiento.

En esta tesis se analizan diferentes conceptualizaciones y caracterizaciones de error, así como tipificaciones del mismo a partir de la fuente que lo origina, y de esta manera justificar la conceptualización y tipificación asumida. Se utilizan talleres como recurso de la investigación-acción participativa en los que se muestra como a través del intercambio colectivo de experiencias y saberes, los profesores implicados en el contexto del problema a resolver, fueron capaces de someter la propuesta de tipificación de errores y la metodología a una constatación empírica mediante un ejercicio real. Se muestran ejemplos de algunos errores detectados en el aprendizaje de la asignatura Matemática I y finalmente, se expresan algunas proposiciones a modo de recomendación.

Índice

INTRODUCCIÓN

> *“Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias, aún más que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda. Son pocos numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión.”*
>
> *Gaston Bachelard, 1938*

La Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) es una institución cubana que fue creada en el año 2002. Su objetivo fundamental es formar profesionales altamente calificados en la rama informática para contribuir al proceso inaplazable de informatizar el país, es por ello que “**el proceso de informatización de la sociedad**” (UCI, 2014, p. 7) constituye el objeto de la profesión de sus egresados.

Para responder a la formación del profesional declarado en el perfil se requiere el estudio de varias disciplinas, de las cuales la matemática da soporte, de una forma u otra a todas las demás y esta importancia que tiene se refleja en el volumen que ocupa en el currículo. El plan de estudios de la UCI tiene concebida la impartición de las matemáticas en dos disciplinas: Matemática y Matemática Aplicada, las cuales constituyen el 17,7 % del total de horas asignadas al currículo base. Si se tiene en cuenta que en el primer año de la carrera las asignaturas de la Disciplina Matemática constituyen el 47,17% del total de horas del año, no es de extrañar que tengan una alta incidencia en los resultados académicos de los estudiantes.

No son pocos los reportes de investigaciones en Educación Matemática que tratan la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia, que se manifiestan en las dificultades que muestran los estudiantes, desde el momento que ingresan en la universidad. (Artigue, 1998), (Otero, Fanaro, & Elichiribehety, 2001), (Dodera, Bender, Burroni, & Lázaro, 2014). La existencia de estas dificultades en los estudiantes al comenzar los estudios universitarios, persistirán durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) de las Matemáticas, si no se identifican para tomar acciones que las mitiguen.

En la UCI, a partir de la información extraída de las llamadas *encuestas de satisfacción* a los estudiantes, del resultado de los *diagnósticos de Matemática* que se le aplica a todo el primer año de la carrera al inicio de cada curso, de los debates con los estudiantes en las reuniones de colectivo de año y del intercambio con ellos en el día a día en las aulas se puede constatar que los estudiantes manifiestan:

- Insuficiencias en los conocimientos y habilidades matemáticos de la enseñanza precedente.
- La matemática es una asignatura difícil la cual tienen que aprobar para continuar la carrera.

Por su parte, el claustro de profesores de la asignatura Matemática I en la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas (FICI)[2] tiene las siguientes características:

- La mayoría son ingenieros egresados de la propia universidad, por lo que no tienen una formación de pregrado en didáctica de la matemática.
- Cerca del 50% son recién graduados en adiestramiento o a lo sumo, con tres años de experiencia docente.

Ahora bien, desde el punto de vista institucional, las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas se han tratado de eliminar o atenuar con múltiples acciones, tales como:

- Reajustes en los programas de las asignaturas.
- Planificación de consultas centralizadas.
- Sistemas de tareas colocadas en el Entorno Virtual de Aprendizaje.
- Guías de ejercicios con vista a los exámenes.
- Creación de la FICI en el curso 2014-15.
- Cursos de postgrado de pedagogía general dirigido a los profesores recién graduados en adiestramiento.

[2] La FICI fue creada en el año 2014 con el objetivo de concentrar en ella a todos los estudiantes del primer año de la universidad y así poder brindarles un mejor tratamiento docente y educativo a los mismos.

- Las pruebas parciales y finales son elaboradas por un grupo reducido de especialistas.
- Planificación centralizada de los tribunales de cuidado de las pruebas y exámenes.
- Cada profesor califica las pruebas de sus estudiantes, pero lo hace en colectivo de profesores.

No obstante lo planteado y a partir de la experiencia del autor de esta tesis; de 16 años de trabajo como profesor de Matemática, del análisis de los informes de asignaturas y de los debates en reuniones metodológicas, se evidencia que se le ha prestado muy poca atención al análisis y tratamiento de los síntomas que delatan las dificultades y el desconocimiento, *los errores* que manifiestan los estudiantes.

Lo más usual en este sentido, es que, al concluir un examen, se les solicite a los profesores tabular los errores más frecuentes según sus propios criterios, o según el criterio del profesor responsable de la asignatura o disciplina. Esta tabulación generalmente se emplea para emitir informes de resultados académicos y queda en manos de los profesores darles un tratamiento a estos errores. En estos informes no se reflejan las causas de los errores y los profesores pocas veces reflexionan en estas causas.

También es de destacar que muchos profesores, incluso estudiantes, ven en el error algo negativo que hay que erradicar de inmediato. Prueba de ello es cuando se escucha decir a un profesor que el estudiante ha “cometido” un error o cuando un estudiante plantea al profesor que no le señale sus “faltas” delante de la clase.

Existen no pocas investigaciones sobre errores y su tratamiento en el aprendizaje de las matemáticas. Entre estas, se coincide con Godino cuando afirma que “Todas las teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información” (Godino, Batanero, & Font, 2003, p. 73).

Al identificar los errores y buscar las posibles causas o fuentes que los provocan, algunos autores se han inclinado más a reconocer como fuente de estos errores, lo que en esta literatura especializada se conoce como *obstáculo*. Entre estos autores se encuentra Bachelard (1938) quien trabajó sobre los obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de las ciencias, Brousseau (1976) quien aplicara esta concepción en el aprendizaje de las matemáticas, Sierpinska (1992) quien hizo un estudio minucioso de los obstáculos que se fueron presentando en la formación del concepto función durante el propio desarrollo histórico de las matemáticas, Ruíz Higueras (1994) quien enfocó su investigación en las concepciones de los estudiantes sobre el concepto función, Cid Castro (2015) quien investigó los obstáculos en el aprendizaje de los números negativos y Estenoz Pino (2016) quien trabajó los obstáculos en el aprendizaje de la Matemática escolar, por solo citar algunos.

Ahora bien, otros autores se han orientado a identificar errores y sus probables fuentes, pero de una manera más amplia. En este sentido se destacan las tipificaciones elaboradas por Radatz (1979) y Movshovitz et al. (1987), citadas por (Rico, 1998) y la de Socas Robayna (1997). Estas tipificaciones no expresan las fuentes de los errores de una manera asequible, que resulte útil al claustro de profesores de la asignatura Matemática I de la FICI para facilitar su posterior tratamiento.

Todo lo antes expuesto permite concluir que, por una parte, la visión generalizada de los profesores sobre los errores como fracaso del estudiante y no como oportunidad de aprendizaje y por la otra, la falta de consenso en la bibliografía consultada acerca de la tipificación de los errores de acuerdo a su fuente, hacen que el tratamiento de los errores sea casi nulo en el contexto del claustro de profesores de la asignatura Matemática I en la FICI.

La situación problemática descrita conduce a identificar como **problema científico:** *¿Cómo diseñar una metodología para tipificar, según su fuente, los errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática I en la Universidad de las Ciencias Informáticas?*

El **objeto de estudio** de esta investigación lo constituye el *Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática I en la UCI*, y el **campo de acción:** *los errores que se manifiestan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática I*.

Se plantea el siguiente **objetivo general** de la investigación: *diseñar una metodología que facilite, según la fuente, la tipificación de los errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática I.*

Como una posible respuesta anticipada al problema científico formulado se plantea como **idea a defender:** *disponer de una metodología que permita, según la fuente, tipificar los errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática I, facilitaría su posterior tratamiento.*

Para dar cumplimiento al objetivo general planteado se formulan además los siguientes **objetivos específicos:**

1. Obtener una tipificación de errores según sus fuentes, que se adecue al contexto donde se desarrolla la investigación.
2. Fundamentar teóricamente los elementos que sustentan el diseño de una metodología para la tipificación de errores en el aprendizaje de la Matemática I, según su fuente.
3. Aplicar la metodología diseñada para la tipificación de errores en un examen de la asignatura Matemática I.
4. Valorar la eficiencia de la metodología diseñada.

Para dar cumplimiento a los objetivos de esta investigación y corroborar la idea a defender se proponen las siguientes **tareas de investigación:**

1. Conciliación y fundamentación de la tipificación de errores que se asume en el contexto donde se desarrolla la investigación.
2. Fundamentación de los conceptos que conforman el marco teórico de la investigación, a partir del análisis de artículos y reportes de investigaciones realizadas por especialistas cubanos y extranjeros.
3. Diseño de una metodología para la tipificación de errores en el aprendizaje según sus fuentes.
4. Valoración de la eficiencia de la tipificación de errores asumida y de la metodología diseñada, mediante la realización de talleres de investigación.

5. Aplicación de la metodología diseñada para la tipificación de errores en un examen de la asignatura Matemática I.

La presente investigación tiene un enfoque **cualitativo**, toda vez que se observó y analizó el proceder del claustro de profesores al tipificar errores en la asignatura Matemática I sin auxiliarse de una metodología de trabajo y luego auxiliándose con la metodología que se propone, pero sin crear grupos experimentales ni de control. Todo el proceso investigativo se llevó a cabo mediante la intervención participativa de los profesores en talleres investigativos. De acuerdo a su finalidad, se considera una **investigación teórica**, pues se justifica la tipificación de errores que se asume y responde a las necesidades del contexto de la FICI, siendo este uno de los principales resultados de la investigación.

Como **métodos de investigación del nivel teórico** se utilizó el **histórico-lógico** cuando se estudió las principales tendencias relacionadas con la identificación y tipificación de errores en el aprendizaje de las matemáticas en diferentes países y en diferentes momentos históricos, el **análisis y síntesis** para el procesamiento de toda la información, en el estudio de documentos y en la elaboración de las conclusiones.

Como **métodos de investigación del nivel empírico** se utilizó **el análisis documental** cuando se revisaron documentos rectores como el plan de estudios de la UCI, el programa de la disciplina Matemática, el programa de la asignatura Matemática I, informes de asignatura, muestras de exámenes parciales y finales de dicha asignatura, actas de reuniones metodológicas etc., la **observación de clases** de tipo taller y seminario con el objetivo de valorar como los profesores identificaron y trataron los errores que manifestaron sus estudiantes en las mismas y los **talleres de investigación como recurso de la investigación-acción participativa** durante la indagación inicial y la puesta a prueba en colectivo de la tipificación y de la metodología que se propuso.

La presente investigación tiene como **significación práctica** que se proporciona a los profesores una metodología que les permite, según la fuente, tipificar los errores que manifiestan sus estudiantes en el aprendizaje de la Matemática I para el posterior tratamiento de los mismos. Como **significación teórica**, se logró estandarizar una terminología que, sin entrar en contradicción con las tipificaciones consultadas en la bibliografía, permite justificar la tipificación de errores asumida.

La tesis está conformada por: introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

El primer capítulo, *Acerca de los errores en el aprendizaje. Presupuestos teóricos y estado del arte de la investigación*, se dedica a caracterizar el estado del arte del tema que se investiga y a establecer el marco teórico de la investigación. En el segundo capítulo, *Diseño de una metodología para la tipificación de los errores en el aprendizaje, según sus fuentes.*, se diseña una metodología para tipificar los errores de los estudiantes de acuerdo a sus fuentes, se ejemplifica la puesta en práctica de la misma en el contexto de la Matemática I en la FICI y finalmente se hace una valoración de la metodología diseñada mediante el uso de talleres como recurso de la investigación-acción participativa.

CAPÍTULO 1: Acerca de los errores en el aprendizaje. Presupuestos teóricos y estado del arte de la investigación

1.1 Un recorrido por algunos enfoques en la investigación sobre la noción de error en el aprendizaje de la Matemática

Existe una arraigada concepción en muchos profesores de que el error es una dificultad, algo nocivo que se debe evitar a toda costa y que cuando se manifiesta en los estudiantes hay que erradicar de inmediato. No sorprende esta creencia, cuando se suele escuchar que un estudiante ha "*cometido* un error", pues en este contexto el verbo cometer generalmente se utiliza en la acepción "…una falta o un delito." (Pequeño Larousse Ilustrado, 2008, p. 267), lo que impregna la frase un halo de negatividad. Sin embargo, se comparte la idea que expresan diferentes investigadores, tales como, Socas Robayna (1997), Rico (1998), Bachelard (2000), Godino, Batanero y Font (2003), Brousseau (2007), Cid Castro (2015) y Estenoz Pino (2016), entre otros, quienes defienden que el error es consustancial al conocimiento y ha formado parte del propio desarrollo de la ciencia en su devenir histórico, por lo que juega un rol importantísimo en PEA de cualquier asignatura.

En los trabajos de (Socas R., 1997) y (Rico, 1998), se hacen análisis históricos sobre investigaciones realizadas acerca de los errores que manifiestan los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En estos análisis se muestran diferentes caminos y la multiplicidad de enfoques que han tomado las investigaciones sobre errores en esta ciencia.

Según Mulhern (1989), citado por (Rico, 1998), desde el punto de vista metodológico las investigaciones sobre errores se pueden agrupar en las siguientes categorías:

1. Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.
2. Análisis de los tipos de errores cometidos.
3. Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntoma de concepciones inadecuadas.
4. Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos.

La primera categoría evidentemente no da mucha información sobre la naturaleza del error para poder tratarlo, siendo una de las más empleadas, por ejemplo, para realizar informes parciales o finales en una asignatura. La tercera categoría; según plantea el propio autor, no facilita encontrar la fuente del error por lo complejo que se hace seguir la línea de pensamiento de los estudiantes. La última categoría, presupone una dedicación profesionalizada en la investigación, lo cual se le hace difícil a un profesor que debe cumplir con una carga docente alta; siendo esta una característica del claustro de la FICI, que además, como ya se había planteado, está constituido por profesores muy jóvenes con poca experiencia docente.

La mayor cantidad de investigaciones se encuadran metodológicamente en el segundo tipo. En este caso al analizar los tipos de errores que manifiestan los estudiantes, se procura hacer una clasificación de los mismos, ver en qué medida se desvían de la respuesta correcta e inferir las posibles causas o *fuentes* que los provocan.

Según Socas Robayna (1997) hay tres direcciones que pueden orientar al profesor a la hora de inferir la fuente del error y que no son necesariamente disjuntas:

1) Errores que tienen su origen en un obstáculo.
2) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
3) Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

La *ausencia de sentido* se puede explicar en situaciones donde hay carencias en la comprensión de los contenidos matemáticos, tanto los específicos (conceptos, teoremas, procedimientos, etc.) como no específicos (habilidades generales matemáticas, habilidades lógicas, etc.). Las *actitudes afectivas y emocionales* impactan siempre el aprendizaje, y si éstas no se traducen en una motivación positiva hacia el mismo, no es de extrañar que se manifiesten errores en las producciones de los estudiantes.

El obstáculo como fuente de errores, por su importancia y sobre todo, por la atención que ha recibido en la investigación en educación matemática será tratado en el epígrafe siguiente.

1.2 La noción de *obstáculo* como fuente de errores

Las investigaciones sobre obstáculos tienen sus orígenes en los trabajos de Gastón Bachelard, epistemólogo francés que en su obra, "La formación del espíritu científico" de 1938, acuñó el término de *obstáculo epistemológico*; aunque planteó que el mismo se aplicaba a los conocimientos científicos de la Física y otras ciencias, no así a los conocimientos matemáticos (Bachelard, 2000).

No fue hasta el año 1976 que el profesor francés Guy Brousseau contextualizó el concepto de obstáculo al campo de la enseñanza de las Matemáticas como parte de su Teoría de las Situaciones Didácticas. En dicha teoría la noción de *obstáculo* es esencial, pues el profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje deberá ir creando situaciones en las que el objetivo fundamental es ir venciendo dichos obstáculos.

En la referida teoría, para definir el concepto de obstáculo, se parte de la noción de *concepción*, entendida como "…conjunto de conocimientos y de saberes, frecuentemente requeridos en simultáneo para resolver situaciones y pueden determinarse empíricamente como patrones de respuestas coherentes dadas por gran parte de los sujetos a un tipo de situación." (Brousseau, 2007, p. 44). Estas concepciones le funcionan al estudiante dentro de un contexto específico de situaciones, más allá del cual este deberá modificarlas o sustituirlas por otras nuevas. Cuando la concepción se resiste a ser sustituida o modificada por otra más eficiente, debido, sobre todo, al hecho de que le ha funcionado al estudiante hasta el momento, entonces dicha concepción se constituye en un obstáculo para el aprendizaje.

Los autores Palarea y Socas plantean que, tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como "… aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas." (Palarea Medina & Socas Robayna, 1994, p. 93). Esta conceptualización de obstáculo es la que se asume en esta investigación.

A su vez los obstáculos, como fuentes de error pueden tener, según Brousseau, orígenes diferentes:

- *Los de origen ontogenético,* tienen que ver con el desarrollo cognitivo del estudiante.
- *Los de origen didáctico,* están relacionados con la elección metodológica del profesor dentro del sistema didáctico.
- *Los de origen epistemológico*: Están vinculados con la dificultad intrínseca del concepto a aprender y pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la Matemática, en la génesis misma de los conceptos.

En esta investigación no se tiene en cuenta el obstáculo de origen *ontogenético,* pues los estudiantes que cursan la universidad, a diferencia de los de otras edades, ya alcanzaron una madurez en su desarrollo cognitivo.

En su tesis doctoral sobre obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de número negativo, la profesora e investigadora española Eva Cid, cita a Duroux (1982) quien plantea un grupo de exigencias que debe cumplir una concepción para ser calificada de obstáculo epistemológico.

"Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau es la siguiente:

a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada. ” (Cid Castro, 2015, p. 12)

Se coincide con esta autora cuando afirma que, a su juicio, los errores de origen didáctico también manifiestan estas características, pues independientemente del origen el obstáculo, como concepción, es un saber instalado en la mente del estudiante.

Continuando el análisis de Eva Cid, ella plantea que otros autores como Léonard y Sackur (1990) se resisten a calificar de obstáculos a estas concepciones y prefieren llamarle *conocimiento local* el cual reconocen como un conocimiento correcto dentro de ciertos límites, pero que el alumno desconoce la existencia de dichos límites. (Cid Castro, 2015). A juicio del autor de esta tesis, esta nueva denominación es innecesaria, y manifiesta de cierta manera el reconocimiento de los obstáculos como fuente de errores en el aprendizaje.

No obstante, el tema de los obstáculos y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas, es aún un tema polémico. En este sentido, autoras como Michele Artigue y Anna Sierpinska, aun cuando han realizado importantes investigaciones en esta área, han manifestado sus dudas relacionadas con la consistencia de estos conceptos. Véase un caso, Brousseau pone el siguiente ejemplo de obstáculo epistemológico: “El alumno que tuvo que comprender que el producto de números naturales mayores que 1 es una repetición de sumas -y, en consecuencia, es más grande que cada factor- no accede fácilmente a interpretar y utilizar 0,2 x 0,3 = 0,06 ni distingue el número natural 4 que tenía un antecesor, del “mismo” 4 pero ahora decimal que no lo tiene.” (Brousseau, 2007, p. 46).

En relación al ejemplo anterior Artigue plantea que se trata de una “generalización abusiva” de las propiedades de los números naturales, citado por (Cid Castro, 2015, p. 74) y Sierpinska coincide planteando que “A lo que llamaremos obstáculo en el ejemplo citado será más bien a nuestra tendencia a las generalizaciones prematuras, a las extrapolaciones excesivas.” citado por (Cid Castro, 2015, p. 74).

En otro planteamiento Sierpinska se cuestiona: “Por otra parte ¿Por qué hay tantas controversias sobre la naturaleza de los obstáculos epistemológicos? Estos últimos parecen escapar a cualquier definición satisfactoria. Puesto que todo conocimiento puede ser un obstáculo, incluso algunas veces se llega a la conclusión de que la noción de obstáculo no tiene sentido (si se considera que todo lo que ya se sabe es un obstáculo a lo que no se sabe todavía" (Sierpinska, 1989, p.130) citado por (Cid Castro, 2015, p. 72).

Muy relacionado con este último planteamiento, la investigadora cubana Silvia Estenoz en su tesis doctoral define su concepción de obstáculo epistemológico de la siguiente manera: "Los obstáculos epistemológicos de la Matemática Escolar son aquellos contenidos conceptuales del programa de Matemática, que producen confusiones o entorpecimientos durante su aprendizaje y afectan la capacidad de los estudiantes para entender otros contenidos de enseñanza relacionados con ellos, con independencia de los errores o imprecisiones que puedan cometerse al enseñárselo." (Estenoz Pino, 2016, p. 25).

En el Anexo 12 de la referida tesis (Estenoz Pino, 2016, p. 162) se explica como el concepto de función modular constituye un obstáculo epistemológico pues es un concepto complejo, cuyo aprendizaje depende de que se tenga el conocimiento precedente del concepto de valor absoluto de un número real y del concepto general de función, además, el concepto de función modular entorpecerá entonces el aprendizaje de otros conocimientos matemáticos que dependen de él. En opinión del autor de esta tesis, este ejemplo es coherente con la definición de obstáculo epistemológico dada por la investigadora citada, pero difiere en aspectos fundamentales del concepto dado por Brousseau, o sea, en lo referente a que el obstáculo pueda ser algo más que un concepto matemático que produce "confusiones o entorpecimientos durante su aprendizaje", pues entonces, dado que los contenidos conceptuales de la matemática son complejos por naturaleza, concluiría como Sierpinska, pensando que todo conocimiento sería entonces un obstáculo para el aprendizaje de nuevos conocimientos. Lo anteriormente planteado demuestra la diversidad de criterios que se han manejado en torno al concepto de obstáculo en el aprendizaje como fuente de errores.

El autor de esta tesis, dada la complejidad del tema a tratar, coincide con Brousseau (1983) cuando plantea que "…la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso", citado por (Socas, 2007, p. 33). En consecuencia, se tienen en cuenta los obstáculos como fuente de errores en el aprendizaje, aunque no son los primeros la única causa de los últimos.

1.3 Conceptualización de error

Según aparece en el diccionario Larousse el error es "Concepto o expresión falsos, no conformes a la verdad: *el examen estaba plagado de errores*" (Pequeño Larousse Ilustrado, 2008, p. 401), expresándose en una primera acepción una idea general del término. No obstante, en el ejemplo mostrado se puede leer entre líneas la connotación negativa que que este concepto tiene, pues casualmente el ejemplo se refiere al ámbito educativo.

A continuación, se muestran algunas conceptualizaciones y caracterizaciones de error, establecidas en investigaciones relativas al contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, con la finalidad de llegar a una que se ajuste a los intereses de esta investigación.

- Según Godino "hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar" (Godino, Batanero, & Font, 2003, p. 73).
- Según Rico "Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta" (Rico, 1998, p. 76).
- Socas Robayna considera el error como "…la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solo como una falta específica de conocimiento o de un despiste." (Socas R., 1997, p. 125).
- Rivalta Valladares considera que "un estudiante comete errores en el aprendizaje, cuando al realizar una tarea evidencia una carencia parcial o total de los contenidos específicos o no específicos, o muestra alguna equivocación, según los contenidos declarados en el proyecto curricular o los formalizados en el proceso, aceptados científicamente" (Rivalta Valladares, 2018).

En estas conceptualizaciones de una forma u otra se aprecia como elemento común, que el error es una producción del estudiante que no se corresponde con el conocimiento oficialmente aceptado por la ciencia, pero en las tres primeras no se aclara que aspectos de esas producciones son los errados, que permitan de alguna manera focalizar con más precisión donde está el error.

Si se tiene en cuenta que el conocimiento del cual se está tratando es el contenido de la enseñanza de la Matemática, el cual se asume en esta tesis como "…el contenido específico (conceptos, leyes, teorías, procedimientos y métodos privativos de una ciencia o disciplina en particular) y el contenido no específico (habilidades lógicas, habilidades de carácter general, procedimientos algorítmicos, heurísticos, habilidades de estudio, los valores a desarrollar. (Hernández F. & Lópes, s/f)

Por ello para los fines de esta investigación, se justifica considerar como conceptualización de error la dada por Rivalta Valladares (2018).

1.4 Tipificación de errores a partir de las fuentes que los originan

Como ya se ha analizado, para dar un tratamiento adecuado a los errores que manifiestan los estudiantes, es importante primeramente identificar las causas o fuentes que los originan. En este sentido se analizó el *obstáculo* como fuente de errores en el aprendizaje y se explicó como en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau este concepto es esencial, al punto de no considerarse prácticamente otras posibles fuentes del error. Ahora bien, existen múltiples tipificaciones realizadas por diferentes autores que abren el diapasón de estas posibles fuentes. Se muestran a continuación las más significativas a juicio del autor:

Según Radatz (1979) citado por (Rico, 1998)

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Errores debido a rigidez del pensamiento.

- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Según Movshovitz et al.(1987) citado por (Rico, 1998)

- Errores debidos a datos mal utilizados.
- Errores debidos a una utilización incorrecta del lenguaje.
- Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.
- Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.
- Errores debidos a la falta de verificación en la solución.
- Errores técnicos: errores de cálculo, de procedimiento en algoritmos básicos.

Estas tipificaciones se sustentan, en relacionar los errores con contenidos propios de la Matemática, con habilidades del pensamiento lógico, uso del lenguaje, etc., pero se aprecia en ellas cierta dispersión en cuanto a la focalización de las fuentes de los errores, o sea, estas tipificaciones no facilitan, a juicio del autor, que los profesores de la FICI tengan una estructuración mejor ordenada de dichas fuentes.

Las razones expuestas, guiaron esta investigación a asumir una tipificación de errores en la Matemática que permitiera orientar a los profesores, de manera asequible, a identificarlos y clasificarlos según sus fuentes para su posterior tratamiento.

Si se analizan detalladamente las tipificaciones mencionadas anteriormente se puede apreciar como los tipos de errores que se declaran tienen su manifestación en acciones realizadas por los estudiantes. Según la teoría de la actividad, sea un concepto, un procedimiento o una habilidad matemática los contenidos no solo se asimilan sino se manifiestan mediante acciones, pues como expresa la psicóloga rusa Nina Talízina: "...no se puede separar el saber del saber hacer, porque saber siempre es saber algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer. Entonces para llegar a algún acuerdo sobre qué es saber, siempre hay que determinar los tipos de habilidades, gracias a las cuales funcionan, se expresan los conocimientos" (Talízina N. , 1984, p. 48).

En otra de sus obras esta autora, tratando el tema de la formación de los conceptos enfatiza "Las acciones intervienen como medio de formación de los conceptos y como medio de su existencia: al margen de las acciones el concepto no puede ser asimilado ni aplicado posteriormente a la solución de problemas. Por ello, las particularidades de los conceptos formados no pueden ser comprendidas sin la orientación a la actividad cuyo producto representan.” (Talízina N. , 1988, pp. 153-154).

Continuando el análisis de las tipificaciones mencionadas, el autor de esta investigación se planteó la necesidad de reescribir y reagrupar los tipos de errores que estos autores expresan, de manera que la nueva tipificación así obtenida, expresara las fuentes de los errores en términos de constructos que tengan implícitas las acciones que deben realizar los estudiantes para mostrar su aprendizaje, a saber, en términos de contenidos específicos y en términos de contenidos no específicos. Por supuesto, ya se había estado de acuerdo en incluir también los obstáculos como posibles fuentes de errores.

Para expresar mejor el análisis realizado se enumeraron las tipificaciones mencionadas como se muestra a continuación:

Tipificación de Radatz

1. Errores debidos a la dificultad del lenguaje.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debido a rigidez del pensamiento.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Tipificación de Movshovitz et al.

6. Errores debidos a datos mal utilizados.
7. Errores debidos a una utilización incorrecta del lenguaje.
8. Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.
9. Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.
10. Errores debidos a la falta de verificación en la solución.
11. Errores técnicos: errores de cálculo, de procedimiento en algoritmos básicos.

El análisis realizado con estos tipos de errores arroja que los tipos 3 y 9 apuntan como fuente del error a “conceptos” y los tipos 10 y 11 apuntan a “procedimientos”, en ambos casos se hace referencia a contenidos específicos de la Matemática. El tipo 2 puede estar apuntando a la habilidad “graficar” y el tipo 11, que ya fue mencionado, también apunta a la habilidad “calcular”, por lo que estos dos tipos junto al tipo 3, se puede afirmar que apuntan a las Habilidades Generales Matemáticas, en otras palabras, a contenidos no específicos de la Matemática. Por último, se puede advertir que los tipos 1, 5, 7 y 9 apuntan a “obstáculos” como fuentes del error.

De lo planteado anteriormente se asume en esta investigación la siguiente tipificación de errores tomada de la definición operacional de error dada en (Rivalta Valladares, 2018):

- Error originado por carencia en los contenidos específicos (conceptos, procedimientos, proposiciones, etc.)
- Error originado por carencia en los contenidos no específicos (Habilidades Generales Matemáticas, etc.)
- Error originado por obstáculo (didáctico, epistemológico)

Aquí las Habilidades Generales Matemáticas, son consideradas como un conjunto de “verbos bien definidos, que sirven para unificar el lenguaje en la formulación de los objetivos en los programas de asignaturas matemáticas” (Delgado Rubí, 1999). El listado de habiliades generales matemáticas que se manejan en la enseñanza de la Matemática en Cuba aparece en el **ANEXO 1**.

1.5 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se hizo un análisis de los principales derroteros que ha seguido la investigación sobre los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, se muestra como los obstáculos son considerados en mayor o menor medida como fuentes de errores y se asumen una conceptualización y una tipificación de error que satisface las exigencias de la presente investigación, a partir de una adecuada argumentación.

CAPÍTULO 2: Diseño de una metodología para la tipificación de los errores en el aprendizaje, según sus fuentes

2.1 Principios para diseñar una metodología en el marco de la actividad científico-pedagógica

Según el diccionario Pequeño Larousse Ilustrado 2008, se entiende por *metodología*: "Ciencia que estudia los métodos de conocimiento. 2. Aplicación coherente de un método. 3.Método, conjunto de operaciones." (Pequeño Larousse Ilustrado, 2008, p. 672) , o sea, se hace referencia a una forma ordenada y rigurosa en la búsqueda del conocimiento o con otro fin. Desde la óptica de la ciencia filosófica se entiende por *metodología* el "Conjunto de procedimientos de investigación aplicables en alguna ciencia." (Rosental & Iudin, 1973, p. 317), acepción que mantiene su enfoque en la investigación científica.

En el caso específico de la Pedagogía, según De Armas R. y Valle L. (2011) la *metodología* como un resultado científico puede ser usada con los propósitos siguientes:

1. Acceder al conocimiento de la educación en sus diferentes niveles de concreción como objeto de la ciencia pedagógica.
2. Dirigir el proceso de apropiación por el educando de los contenidos de la educación.
3. Dirigir el proceso de autoeducación del educando.
4. Orientar la realización de actividades de la práctica educativa.
   (De Armas Ramírez & Valle Lima, 2011, p. 45)

Se considera que esta investigación se encuadra en el último propósito mencionado a la hora de entender la *metodología* como un resultado científico.

Según los autores citados, los rasgos que caracterizan a una metodología son los siguientes:

- Es un resultado relativamente estable que se obtiene en un proceso de investigación científica.
- Responde a un objetivo de la teoría y la práctica educacional.
- Se sustenta en un cuerpo teórico (categorial y legal) de la Filosofía, las Ciencias de la Educación, las Ciencias Pedagógicas y las ramas del conocimiento que se

relacionan con el objetivo para el cual se diseña la metodología (matemática, español, valores, orientación profesional, etcétera).

- Es un proceso lógico conformado por etapas, eslabones, o pasos condicionantes y dependientes, que ordenados de manera particular y flexible permiten el logro del objetivo propuesto.
- Cada una de las etapas mencionadas incluye un sistema de procedimientos que son condicionantes y dependientes entre sí y que se ordenan lógicamente de una forma específica.
- Tiene un carácter flexible, aunque responde a un ordenamiento lógico.

  De Armas R. & Valle L. (2011, pp. 48-49, op.cit.)

Después de diseñada la metodología, con frecuencia se hace necesaria alguna orientación para presentarla como un resultado científico, los autores citados recomiendan el orden siguiente:

- Objetivo general.
- Fundamentación.
- Aparato conceptual que sustenta la metodología.
- Etapas, pasos o eslabones que componen la metodología como proceso. Concatenación y ordenamiento de las mismas.
- Procedimientos que corresponden a cada etapa o eslabón. Secuencia, interrelación específica entre dichos procedimientos que permite el logro de los objetivos propuestos.
- Representación gráfica total o parcial siempre que sea posible.
- Evaluación. Acciones que permiten comprobar si la metodología garantiza el logro de los objetivos propuestos.
- Recomendaciones para su instrumentación. La metodología debe acompañarse de las orientaciones que permiten su aplicación en diferentes contextos y condiciones.

  De Armas R. & Valle L. (2011, p. 50, op.cit.)

En esta investigación se tomó en cuenta la orientación recomendada por los autores citados, al presentar la metodología diseñada.

2.2 Metodología para tipificar errores en el aprendizaje de la Matemática I en la UCI

A partir del análisis documental realizado y de las características propias de esta investigación se procedió a diseñar una metodología que facilite el trabajo de tipificación a los profesores de la FICI, la misma se expone a continuación:

Objetivo general:

Tipificar los errores que manifiestan los estudiantes en el PEA de la Matemática I como un primer paso para el posterior tratamiento de los mismos.

Fundamentación:

Esta metodología responde a la necesidad que tienen los profesores de la asignatura Matemática I de tipificar los errores que manifiestan sus estudiantes en el aprendizaje de la asignatura, según la fuente de los mismos y usando una terminología estandarizada en el contexto de la FICI.

Aparato conceptual que sustenta la metodología:

Esta metodología se sustenta en los conceptos fundamentales siguientes:

Contenido matemático: El contenido como categoría de la didáctica responde a la pregunta ¿qué enseñar? En Matemáticas se enseñan conceptos, procedimientos y proposiciones, lo que se entiende como contenidos específicos y habilidades matemáticas generales junto a habilidades del pensamiento lógico, lo que se entiende como contenidos no específicos.

Error: Un estudiante comete errores en el aprendizaje, cuando al realizar una tarea evidencia una carencia parcial o total de los contenidos específicos o no específicos, o muestra alguna equivocación, según los contenidos declarados en el proyecto curricular o los formalizados en el proceso, aceptados científicamente.

Obstáculo: Es aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.

Tipificación de errores: Los errores, atendiendo a su fuente se tipifican como:

- Error originado por carencia en los contenidos específicos (conceptos, procedimientos, proposiciones, etc.)
- Error originado por carencia en los contenidos no específicos (Habilidades Generales Matemáticas)
- Error originado por obstáculo (didáctico, epistemológico)

Pasos que componen la metodología:

1. Inferir errores potenciales que los estudiantes pudieran manifestar. Este paso se cumplirá durante la preparación de una clase o en el proceso de diseño de un instrumento de evaluación, siempre a partir de los objetivos de la actividad docente y del conocimiento que tiene el profesor de sus estudiantes.
2. Tipificar los errores detectados en la actividad docente (clase o evaluación) y tabularlos.
3. Crear grupos de estudiantes por tipos de errores más frecuentes, de manera que facilite el posterior tratamiento didáctico de dichos errores.
4. Comparar la estimación de errores potenciales del paso 1 con los identificados y tipificados en el paso 2, de manera que sirva de retroalimentación para mejorar el proceso.
5. Interactuar con los estudiantes, siempre que sea posible, para afinar el proceso de aproximación a las causas o fuentes de los errores, lo cual enriquecerá la experiencia del profesor para posteriores procesos.

Evaluación de la metodología:

Se recomienda realizar talleres metodológicos donde participen los profesores del colectivo de asignatura de manera que se puedan recopilar y analizar experiencias de trabajo con la metodología, siempre con el objetivo de entrelazar opiniones, visiones, técnicas, etc. y así mejorar la práctica docente.

Recomendaciones para su instrumentación:

Para aplicar con éxito esta metodología es necesario que los profesores:

- Dominen el trabajo didáctico y metodológico con los contenidos específicos y no específicos de la Matemática I.
- Dominen la tipificación que se usará y los conceptos fundamentales asociados a la misma, como error y obstáculo.
- Realicen un diagnóstico frecuente que les permita tener una caracterización de los estudiantes sobre los saberes y errores mostrados en su aprendizaje.

2.3 Validación de la tipificación de errores y de la metodología propuesta

Para justificar la tipificación de errores asumida, diseñar la metodología y validar ambas, se realizaron dos talleres de investigación en los que participaron los profesores del claustro de la asignatura Matemática I de la FICI. El primer taller tuvo el objetivo principal de registrar como los profesores participantes, a partir de su propia experiencia y forma de hacer, tipificarían los errores que manifestaron los estudiantes en una evaluación escrita real realizada con anterioridad[3]; en este taller no se dio información alguna relacionada con tipificaciones existentes.

Después de realizado el primer taller se analizaron las tipificaciones realizadas por los profesores talleristas y se verificó en qué medida, la propuesta de tipificación que se propone se ajustaba a lo elaborado por ellos. A partir de ahí se diseñó una propuesta de metodología de tipificación de errores, para facilitar el trabajo de los profesores.

[3] Examen final de la asignatura realizado del curso 2016-2017

El segundo taller tuvo como objetivo principal registrar como los profesores talleristas tipificarían los errores que manifestaron los estudiantes en el mismo examen utilizado en el primer taller, a partir de la propuesta de tipificación y de la metodología que se propone.

Antes de describir el desarrollo de los talleres se analizarán algunas cuestiones esenciales relacionadas con la teoría sobre el *taller* como recurso de investigación en pedagogía.

2.3.1 El taller como recurso de la investigación-acción en investigaciones pedagógicas

La *investigación-acción* es un método de investigación cualitativa, que se utiliza en las ciencias sociales a partir de los años posteriores a la segunda guerra mundial y se inició con los trabajos de Kurt Lewin. Este autor partió del hecho de estudiar los fenómenos sociales produciendo cambios en ellos, analizando dichos cambios y los efectos que estos producen. (Banister, Burman, Parker, Taylor, & Tindall, 2004)

La investigación-acción tiene diferentes fases, que según (Kemmis McTaggart, 1988), citado por (Bausela Herreras, 2004, p. 5) son las siguientes:

1. Diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial.
2. Desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo.
3. Actuación para poner el plan en práctica y la observación de sus efectos en el contexto que tiene lugar.
4. La reflexión en torno a los efectos como base para una nueva planificación.

La investigación-acción "…se concentra en conocimientos precisos aplicados a un problema específico en una situación específica: su fuerza particular es que se evalúa a sí misma y es colaborativa, y su objetivo último es mejorar la práctica." (Banister, Burman, Parker, Taylor, & Tindall, 2004, p. 143).

La presente investigación se concentra en el estudio de las tipificaciones existentes sobre los errores en el aprendizaje a partir de sus fuentes y en proponer una tipificación que se ajuste al contexto de utilización que tendrá la misma, o sea, el claustro de la asignatura Matemática I, los contenidos de dicha asignatura y los estudiantes de la FICI en la época presente; y luego diseñar una metodología que facilite su uso por los profesores.

En el ámbito educativo se utiliza el *taller* como forma de organización del trabajo docente, siendo este un tipo de clase, por lo cual tiene un carácter eminentemente formativo, según (Ghiso, 1999) en la literatura relacionada con la educación popular, la animación socio-cultural y el trabajo social, el taller también es reconocido con un carácter formativo, sin embargo se recoge en la literatura que muchos procesos de Investigación-acción-participativa mencionan la utilización de talleres como una manera de *recopilar, analizar y construir conocimiento*.

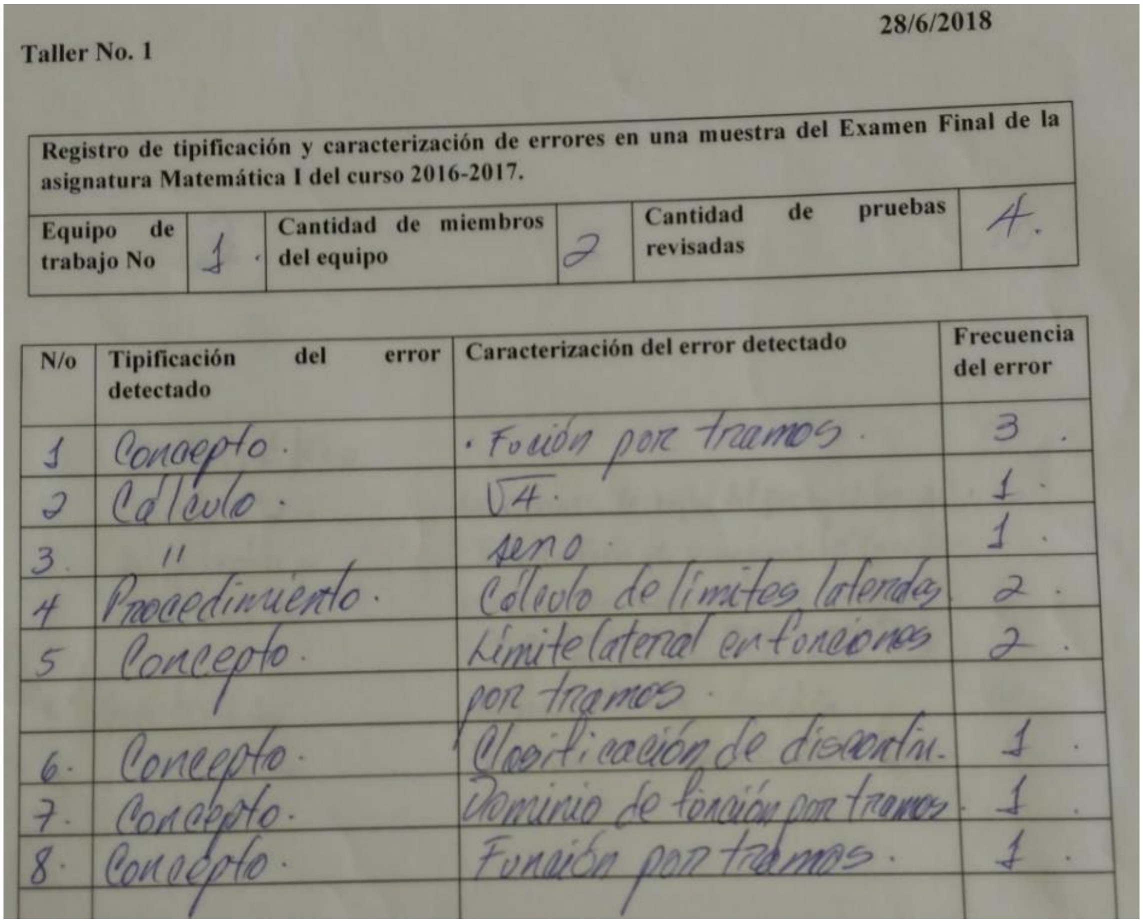
A partir de lo planteado el autor de esta investigación asume el taller como "…la metodología que permite el hacer, el procesar con otros, el entrelazar intensiones, lenguajes, visiones, objetos de estudio, técnicas. Es un espacio para lograr haceres conjuntos que conduzcan al análisis, la discusión académica y la conceptualización." (Montoya Cuervo & Zapata López, 2005, p. 27).

A continuación se describirán los talleres de investigación realizados y sus resultados.

2.3.2 Descripción y resultados del primer taller de investigación

En el primer taller se trabajó en equipos de dos profesores cada uno, a cada equipo se le indicó trabajar solo una pregunta del examen. Los profesores identificaron errores y los tipificaron a partir de su propia experiencia y criterios.

En los **ANEXOS 2 y 3** se pueden ver los documentos relacionados con este primer taller. A continuación, se muestra el registro de uno de los equipos:



Taller No. 1 28/6/2018

Registro de tipificación y caracterización de errores en una muestra del Examen Final de la asignatura Matemática I del curso 2016-2017.					
Equipo de trabajo No	1.	Cantidad de miembros del equipo	2	Cantidad de pruebas revisadas	4.

N/o	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	Frecuencia del error
1	Concepto.	· Función por tramos.	3.
2	Cálculo.	$\sqrt{4}$.	1.
3.	"	seno.	1.
4	Procedimiento.	Cálculo de límites laterales	2.
5	Concepto.	Límite lateral en funciones por tramos.	2.
6.	Concepto.	Clasificación de disconti.	1.
7.	Concepto.	Dominio de función por tramos.	1.
8.	Concepto.	Función por tramos.	1.

Figura 1. Registro del equipo de trabajo No.1 durante el taller No.1

Como resultado de este primer taller se pudo llegar a las siguientes conclusiones:

1. Los profesores talleristas tipificaron mayoritariamente los errores apuntando a los contenidos específicos (en este caso conceptos, procedimientos) como la fuente donde encontrar su origen.

2. En menor proporción tipificaron los errores apuntando a carencias en el dominio de Habilidades Generales Matemáticas, tales como calcular, resolver, graficar.

3. Se pueden inferir que existe poco dominio por parte de los profesores de las habilidades generales matemáticas, así como de considerar las mismas como parte del contenido matemático

4. La tipificación hecha por los profesores se aproxima bastante a la propuesta de tipificación que se propone.

2.3.3 Descripción y resultados del segundo taller de investigación

En el segundo taller, cuya planificación aparece en el **ANEXO 4**, el autor de esta investigación hizo una presentación donde mostró los resultados del primer taller. Continuó con una introducción teórica sobre los errores y las tendencias de diferentes autores para su tipificación y posteriormente expuso la propuesta de tipificación de errores y la propuesta de metodología para llevarla a cabo. A continuación, se estableció un debate sobre estas cuestiones. Algunas de las opiniones fueron las siguientes:

Profesor 1: Manifestó sus dudas si en el caso de los errores originados por obstáculos, estos no podían incluirse dentro de los que apuntan a los contenidos específicos o no específicos.

Profesor 2: Planteó que se recordara que tipificar un error en alguna categoría no implicaba necesariamente que no podía estar en otra categoría a la vez y se puso un ejemplo.

Profesor 3: Consideró que él estuvo pensando un rato mientras los demás se expresaban y que hasta ese momento no se imaginaba ningún error que no cupiera, por así decirlo, en alguna de las categorías de la tipificación propuesta.

Profesor 4: Manifestó que la metodología le parecía incluir los pasos necesarios para poner en práctica la tipificación propuesta.

Luego de esta introducción se trabajó en equipos de dos profesores cada uno, a cada equipo se le indicó trabajar solo una pregunta del examen. En el **ANEXO 5** se muestra la tipificación de errores que se propone, tal y como se les entregó a los equipos para que trabajaran.

A continuación, se muestra el registro detallado de un equipo, por considerarse de los más elaborados, a este equipo se le asignó la pregunta 1 del examen.

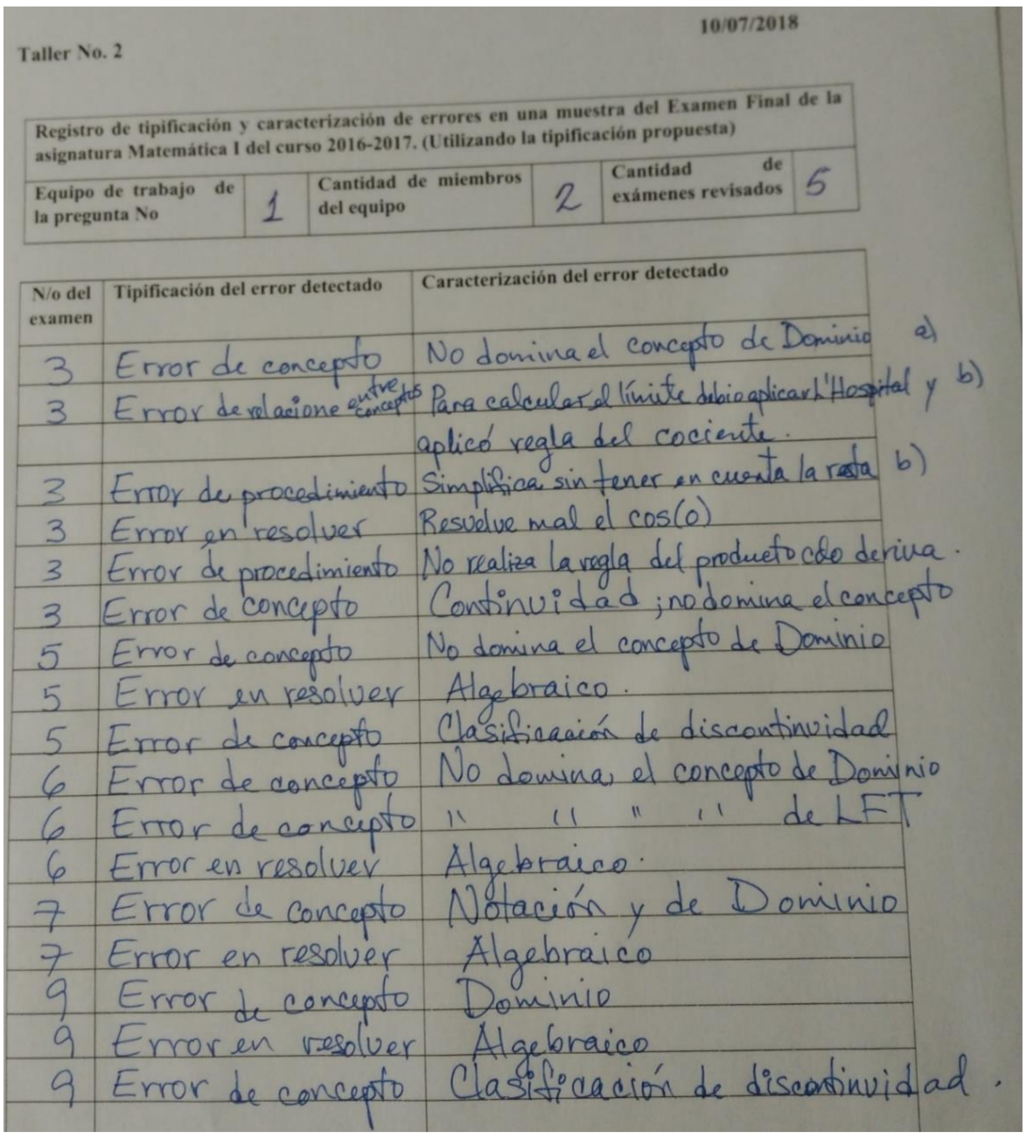
1. Dada la función f, tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x-2)}{4-x^2} & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x = 2 \\ \frac{-x+1}{6x} & si\ \ x > 2 \end{cases}$

   a) Determine el dominio de f.

   b) Calcule $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

   c) Determine si f es continua en $x = 2$, en caso de no serlo, clasifique la discontinuidad.

Figura 2. Pregunta 1 del examen con el que trabajó uno de los equipos en el taller No.2



Taller No. 2 10/07/2018

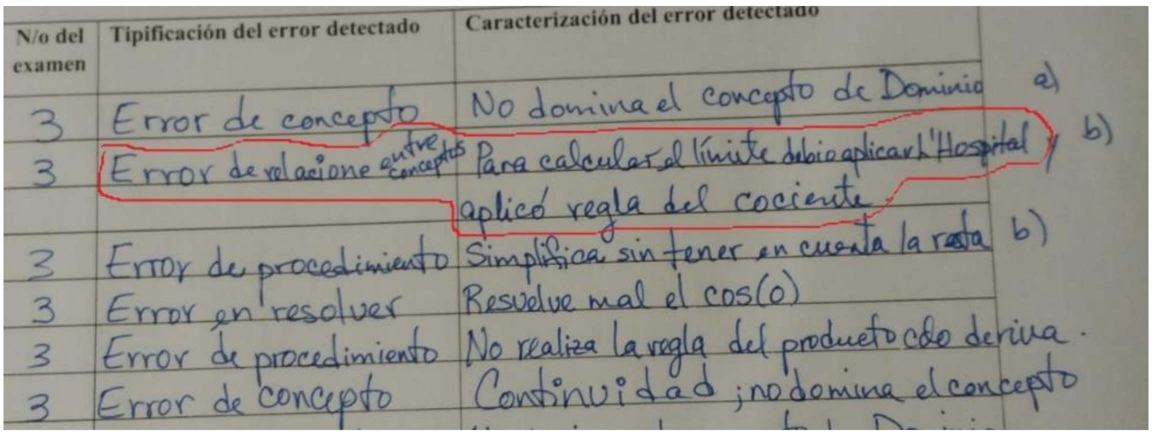
Registro de tipificación y caracterización de errores en una muestra del Examen Final de la asignatura Matemática I del curso 2016-2017. (Utilizando la tipificación propuesta)					
Equipo de trabajo de la pregunta No	1	Cantidad de miembros del equipo	2	Cantidad de exámenes revisados	5

N/o del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio a)
3	Error de relacione entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital y
		aplicó regla del cociente. b)
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el cos(0)
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto cdo deriva.
3	Error de concepto	Continuidad ; no domina el concepto
5	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio
5	Error en resolver	Algebraico.
5	Error de concepto	Clasificación de discontinuidad
6	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio
6	Error de concepto	" " " " de LFT
6	Error en resolver	Algebraico.
7	Error de concepto	Notación y de Dominio
7	Error en resolver	Algebraico
9	Error de concepto	Dominio
9	Error en resolver	Algebraico
9	Error de concepto	Clasificación de discontinuidad.

Figura 3. Registro de la tipificación de errores realizada por uno de los equipos durante el taller No.2

Se puede entender con más claridad la tipificación realizada por este equipo comparándola con la respuesta correspondiente de un estudiante (examen número 3).

En la Figura 4. se resalta un error que muestra un estudiante en su respuesta y la tipificación del mismo hecha por los profesores. En este caso lo tipifican como error de relaciones entre conceptos, o sea, plantean que el estudiante debió aplicar la regla de LHospital para calcular el límite y lo que aplicó fue la regla de la derivada de un cociente.



N/o del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio	a)
3	Error de relacione entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital y aplicó regla del cociente	b)
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta	b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el cos(0)	
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto cdo deriva.	
3	Error de concepto	Continuidad ; no domina el concepto	

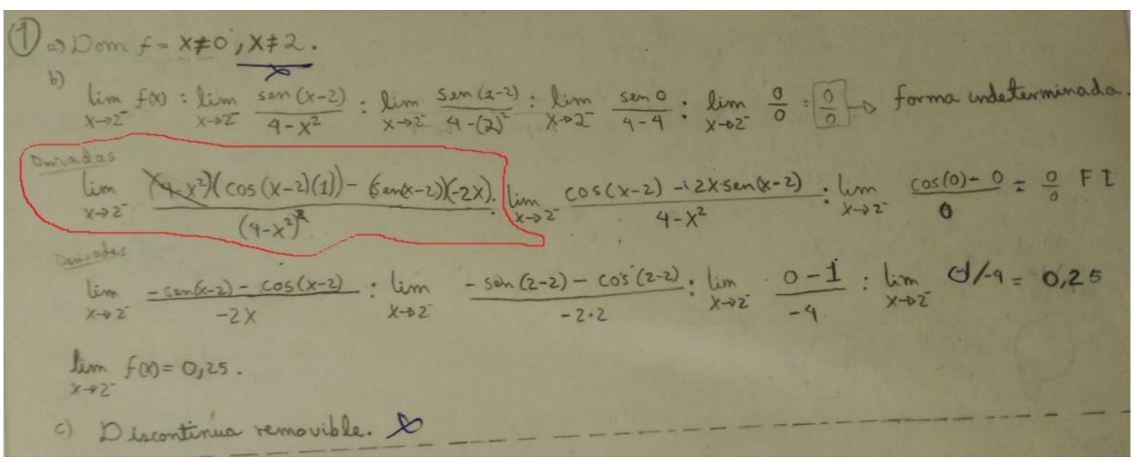


Figura 4. Tipificación de un error mostrado por un estudiante

Aunque hay conceptos implicados en este ejemplo, más bien el estudiante lo que hace es utilizar un procedimiento por otro. El autor de esta tesis, previamente a la realización del taller hizo una tipificación de los errores mostrados por los estudiantes en ese examen, y en este caso de error en particular lo tipificó como un error por obstáculo, pues consideró que el estudiante al intentar calcular el cociente de las derivadas como procedimiento dentro de la regla de L´Hospital, lo que hace realmente es utilizar la regla de la derivada de un cociente, por lo que se infiere que esta última regla, que el estudiante conoce bien, obstaculizó el aprendizaje de la primera.

El ejemplo descrito anteriormente muestra como al intentar tipificar un error, siempre lo que se hace es una inferencia, que un mismo error puede tener causas diferentes en diferentes estudiantes y en un mismo estudiante, pues las fuentes de los errores no son disjuntas. Por lo tanto, se infiere de este ejemplo la necesidad de retroalimentación constante del profesor con el estudiante, de manera que se vaya afinando el trabajo de tipificación por aproximaciones sucesivas.

En el **ANEXO 6** se muestran otros errores que mostró este estudiante en esa pregunta y que fueron tipificados.

2.3.4 Conclusiones de los talleres de investigación

Los talleres de investigación realizados mostraron como a través del intercambio colectivo de experiencias y saberes, los profesores implicados en el contexto del problema a resolver, fueron capaces de someter la propuesta de tipificación de errores y la metodología a una constatación empírica mediante un ejercicio real. La propuesta de metodología para tipificar errores fue enriquecida como resultado del análisis de las opiniones de los participantes, de las dudas que plantearon para trabajar con ella, etc., sobre todo, estas opiniones influyeron en las recomendaciones para su instrumentación.

2.4 Un ejemplo de tipificación de errores en la Matemática I utilizando la metodología propuesta

En esta sección se muestra algunos ejemplos de errores detectados en el aprendizaje de la asignatura Matemática I, a partir de la tipificación asumida; para ello se revisó una muestra del examen final de la asignatura en el curso 2017-2018. La muestra revisada estuvo constituida por 10 exámenes y se tuvo en cuenta solo la pregunta 4.

En la figura a continuación se muestra el enunciado de la pregunta 4 del examen.

4.) Sea la región $\Re$, limitada por $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y = 0$, $x > 1$ y $x = 3$.

a) Sombree la región $\Re$.
b) Plantee la integral que permite calcular el área de la región $\Re$.
c) Calcule el área de la región $\Re$.
d) ¿A qué conclusiones puede arribar con el resultado obtenido en el inciso anterior?

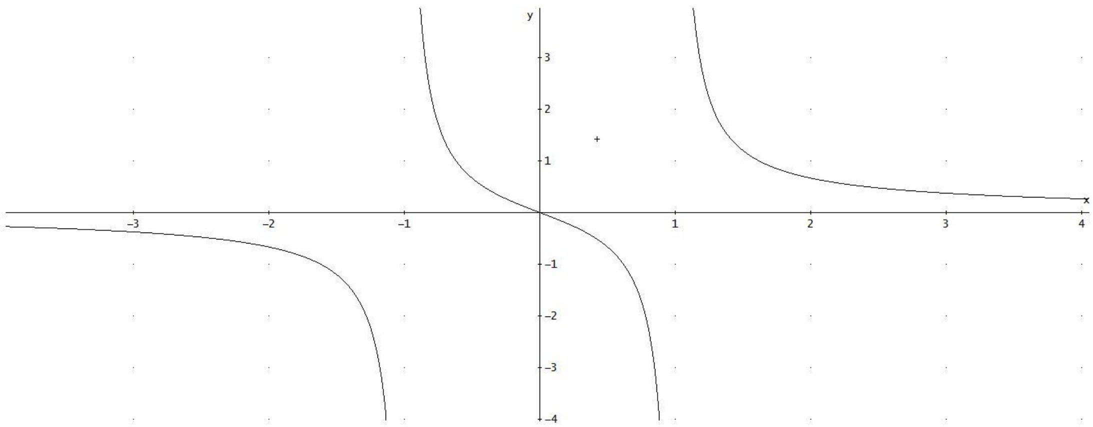


Figura 5. Pregunta 4 del examen final de la asignatura Matemática I correspondiente al curso académico 2017-2018

En la Tabla que sigue se muestra la tipificación de los errores identificados, se omitieron de la tabla los tipos de errores que se repiten en exámenes distintos:

No. del error	No. del examen	Tipo de error según su fuente	Caracterización del error detectado	Indicador[4]
1	1	Error de concepto “notación de diferencial”	Omite el diferencial dx en la expresión $du = 2xdx$	1
2	1	Error de procedimiento “regla $\int \frac{1}{u} du = ln\|u\| + C$ “	Utiliza una regla de integración no válida en este caso	0
3	1	Error de concepto “integral indefinida”	Luego de determinar la familia de funciones primitivas no plantea la suma de la constante “C”	0
4	2	Error de concepto “Función exponencial”	No domina el resultado de $ln\|0\|$	0
5	3	Error de concepto “notación de diferencial”	Mantiene el símbolo del diferencial du en la expresión después de haber integrado	1
6	3	Error de procedimiento	Sustituye du por $2x$ inducido por el error anterior	0
7	5	Error de procedimiento “Método de integración por sustitución de la variable”	Completa mal el diferencial como operación dentro del procedimiento del método de integración por sustitución de la variable	0
8	6	Error de concepto “Integral impropia de tipo II”	El estudiante crea una fórmula errada para la integral	0
9	8	Error de concepto “Área entre dos curvas”	No domina el concepto de área entre dos curvas como la integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, donde $f(x) >$ $g(x)$ en $[a, b]$, en este caso $g(x) =$	0

[4] Para una mejor claridad del indicador numérico que se utiliza en la tabla véase el ANEXO 5.

			0 por ser el eje de las abscisas y el estudiante asume $g(x) = x$	
10	10	Error de concepto "Integral definida de una función"	Calcula la integral sin tener en cuenta que la función esté definida en el intervalo dado, en este caso la función no está definida en $x = 1$	1
11	10	Error por obstáculo	Para calcular la integral realiza una operación no válida cuando asume que la integral de un cociente es el cociente de las integrales, se infiere que tal vez la regla análoga para el límite de un cociente es un obstáculo en el nuevo contexto de la integración	1

Tabla 1. Tipificación de errores identificados durante la revisión de un examen de la asignatura Matemática I

En la figura que sigue se muestra la respuesta de un estudiante donde han sido señalados los errores 10 y 11 referidos en la tabla anterior, en el **ANEXO 7** se muestran imágenes de los otros errores tipificados.

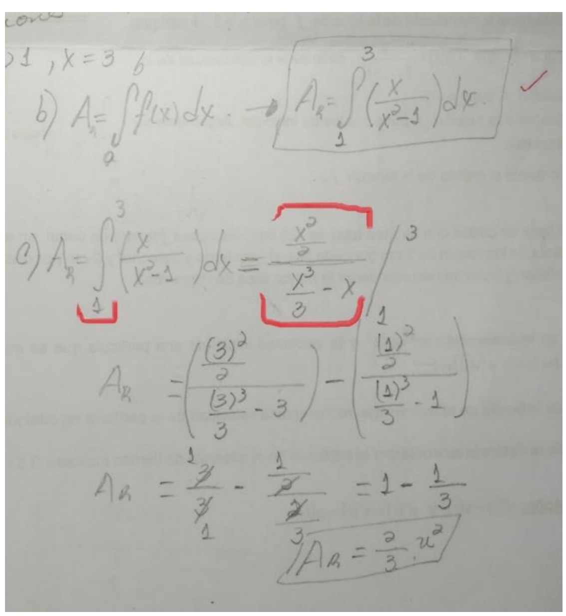


Figura 6. Examen 10, errores 10 y 11

2.5 Conclusiones del capítulo

Se puede concluir que la tipificación asumida y la metodología diseñada en esta investigación son viables para ser utilizadas por el claustro de profesores de la asignatura Matemática I en la FICI. Los profesores talleristas pudieron utilizarla en el trabajo realizado por equipos y expresaron, en el caso de la tipificación, que la misma se ajusta a la terminología empleada en la didáctica de la matemática cubana.

CONCLUSIONES

Como resultado de esta investigación se puede concluir:

1. Se asumió y justificó una tipificación de errores que se adecua al contexto del claustro de profesores de la asignatura Matemática I de la FICI.
2. Se diseñó una metodología que facilita a los profesores identificar y clasificar los errores que manifiestan sus estudiantes, según la tipificación asumida.
3. Se realizó un estudio teórico de las principales tendencias en cuanto a formas de tipificar errores en el aprendizaje de las matemáticas, tanto en el ámbito foráneo como nacional.
4. La utilización de talleres como recurso de la investigación-acción participativa permitió validar la tipificación de errores y la metodología propuestas en este contexto.
5. Una adecuada tipificación constituye el primer paso para aplicar un tratamiento didáctico que elimine o minimice los errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas.

RECOMENDACIONES

A partir de los resultados de esta investigación se hacen las siguientes recomendaciones:

1. Incluir en las líneas de trabajo metodológico del Departamento de Matemática de la FICI la preparación de los profesores para el trabajo con la metodología propuesta.
2. Continuar trabajando para la mejora cíclica de la metodología propuesta, de acuerdo a los preceptos de la investigación-acción participativa.
3. Proseguir con la siguiente fase de investigación, relacionada con el tratamiento didáctico de los errores que manifiestan los estudiantes en la asignatura Matemática I.
4. Valorar la pertinencia de aplicar de la metodología diseñada a otras asignaturas de las disciplinas Matemáticas en la UCI.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime, Volumen 1*(Número 1), 40-55.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico, contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (23 ed.). México, D.F: Siglo ventiuno editores.

Banister, P., Burman, E., Parker, I., Taylor, M., & Tindall, C. (2004). *Métodos cualitativos en psicología, una guía para la investigación.* México: Universidad de Guadalajara.

Bausela Herreras, E. (2004). La docencia a través de la investigación-acción. *Revista Iberoamericana de Educación, 35*(1), 1-9.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cerezal Mezquita, J., & Fiallo Rodríguez, J. (2005). *¿Cómo investigar en Pedagogía?* Ciudad de la Habana.

Cid Castro, E. (2015). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Universidad de Zaragoza*. Zaragoza, España.

De Armas Ramírez, N., & Valle Lima, A. (2011). *Resultados científicos en la investigación educativa.* Cuba: Pueblo y Educación.

Delgado Rubí, J. (1999). La enseñanza de la resolución de problemas. Ciudad de la Habana, Cuba.

Dodera, G., Bender, G., Burroni, E., & Lázaro, M. (junio de 2014). Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(38), 69-84.

Estenoz Pino, S. E. (2016). Estrategia didáctica para el tratamiento de los errores cognitivos de origen epistemológico en el aprendizaje de la Matemática del preuniversitario cubano. *Instituto Central de Ciencias Pedagógicas*. La Habana, Cuba.

Ghiso, A. (1999). Acercamientos: El taller en procesos investigativos interactivos. *Estudios sobre las culturas contemporaneas, V*(9), 145-153.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros.* Granada.

Hernández F., H., & Lópes, M. (s/f). Los contenidos de enseñanza. Criterios para una mejor selección.

Montoya Cuervo, G., & Zapata López, C. (2005). El taller: Una estrategia para la normalización de términos y conceptos en un trabajo terminológico. *Análisis, VI*(1), 25-35.

Otero, M., Fanaro, M., & Elichiribehety, I. (2001). El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Lationamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 267-287.

Palarea Medina, M., & Socas Robayna, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*(16), 91-98.

Pequeño Larousse Ilustrado. (2008). *Diccionario*, 267. Ediciones Larousse, S.A. de C.V.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Edits.), *Educación matemática.* Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Rivalta Valladares, M. (2018). *Tratamiento didáctico para minimizar los errores en el aprendizaje de la Matemática en estudiantes de licenciatura Química.* Tesis doctoral en proceso, La Habana.

Rosental, M., & Iudin, P. (1973). *Diccionario Filosófico.* Argentina: Ediciones Universo.

Ruíz Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico. *Universidad de Granada*. Granada, España.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, & G. Harel (Edits.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (págs. 25-58).

Socas R., M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En R. L. otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secuendaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52.

Talízina, N. (1984). *Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la educación superior.* La Habana: Universidad de la Habana: Departamento de estudios para el perfeccionamiento de la educación superior.

Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza.* Moscú, URSS: Progreso.

UCI. (2014). Plan de estudios ¨D¨ Ingeniería en Ciencias Informáticas. *Universidad de las Ciencias Informáticas*. La Habana, Cuba.

ANEXOS

ANEXO 1. CARACTERIZACIÓN DE LAS HABILIDADES GENERALES MATEMÁTICAS[5]

HABILIDAD	DEFINICIÓN
INTERPRETAR	Atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate.
IDENTIFICAR	Distinguir el objeto de estudio matemático, sobre la base de sus rasgos esenciales. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan ciertas características distintivas.
RECODIFICAR:	Transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Como quiera que recodificar es expresar el mismo tipo de objeto a través de formas diferentes, no es más que la utilización de signos.
CALCULAR	Forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual , verbal (oral o escrita), mental y mediante el uso de tablas, calculadoras u ordenadores.
ALGORITMIZAR	Plantear una sucesión estricta de operaciones matemáticas que describan un procedimiento conducente a la solución de un problema.
GRAFICAR	Representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, colegir las relaciones existentes, a partir de su representación gráfica
DEFINIR	Establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio
DEMOSTRAR	Establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación.
MODELAR	Asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos.
COMPARAR	Establecer una relación entre lo cuantitativo o cualitativo que hay entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase.
RESOLVER	Encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema matemático.
OPTIMIZAR	Encontrar el objeto (valor numérico, función, conjunto, etc.,..) que maximiza o minimiza (en algún sentido) la clase de objetos a la que pertenece o el método óptimo de resolución de determinado problema.
APROXIMAR	Sustituir un objeto por otro el cual se considera un modelo suyo.

[5] Juan Raúl Delgado Rubí: En Hernández,H. et al, Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Editorial Homo Sapiens. ISBN: 950-808-173-2. Rosario. Argentina. 1998

ANEXO 2. Planificación del taller de investigación No. 1

Taller No. 1: Los errores en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática I en la FICI. ¡Pongamos nuestras ideas en orden!

Objetivos:

1- Indagar cómo los profesores tienen en cuenta los errores que manifiestan sus estudiantes en el PEA de la asignatura Matemática I.

2- Registrar cómo los profesores tipifican y caracterizan los errores que manifiestan sus estudiantes a partir de una evaluación aplicada.

Guion del taller:

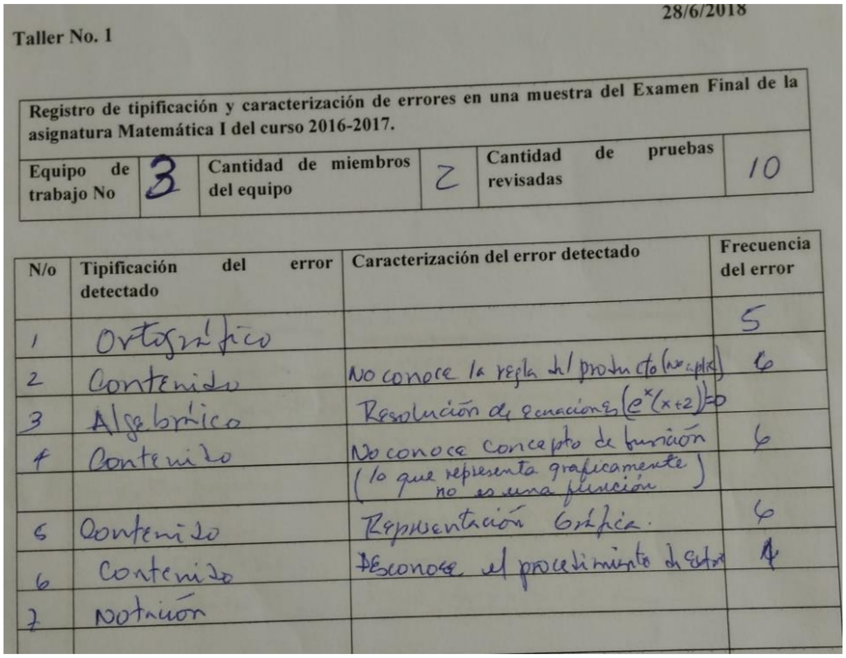
Etapas		Actividades	Tiempo de duración
Planificación		1. Convocatoria: Enviar por correo a todos los profesores participantes el tema y objetivos del taller.	
		2. Coordinar aula o salón con PC y TV.	
Ejecución del taller	Apertura	1. Introducción al tema: Concepto de error, concientizar que se debe ver el error como parte consustancial del proceso de aprendizaje, consenso general en que se debe identificar y caracterizar para luego tratar los errores.	10 min.
		2. Tratar objetivo 1: Escuchar las experiencias y opiniones de todos los profesores talleristas sobre este aspecto.	20 min.
		3. Resumen del aspecto anterior: Hacer un esbozo de la situación problemática en la FICI desde el punto de vista institucional acerca del tratamiento que se da a los errores que manifiestan los estudiantes. (Con mucha ética). Explicar que el alcance de la investigación será hasta la etapa de tipificar los errores. (tratar de que sea una consecuencia lógica de lo expuesto por los profesores)	10 min.
	Desarrollo	1. Tratar objetivo 2 (principal): Explicar que se cumplirá este objetivo en dos momentos (talleres), en el segundo taller se traerá una	10 min.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>propuesta de tipificación de los errores producto del análisis documental realizado y de los resultados que se logren del presente taller. Explicar como norma ética que se trabajará con pruebas de estudiantes reales por lo tanto se deberá tener el mayor respeto y discreción.

2. <u>Trabajo en equipos:</u> Se dividirá el grupo de profesores en cinco equipos (cada equipo analizará los errores que manifestaron los estudiantes en la prueba, a razón de una pregunta para cada equipo), se les pedirá a los profesores que luego de identificar un error analicen como lo tipificarían. Para ello se utilizará un documento de trabajo con el siguiente formato:
<table><tr><td>N/o</td><td>Tipificación del error detectado</td><td>Caracterización del error detectado</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>3 <u>Exposición por equipos de los resultados de su análisis</u>.</td><td>30 min.

40 min.</td></tr>
<tr><td></td><td>Cierre</td><td>1. Resumen del taller.
2. Realizar un PNI.</td><td>10 min.
10 min.
Tiempo total: (2 h. y 30 min.)</td></tr>
</table>

ANEXO 3. Registros del trabajo de tipificación realizado por el resto de los equipos de profesores en el taller No.1



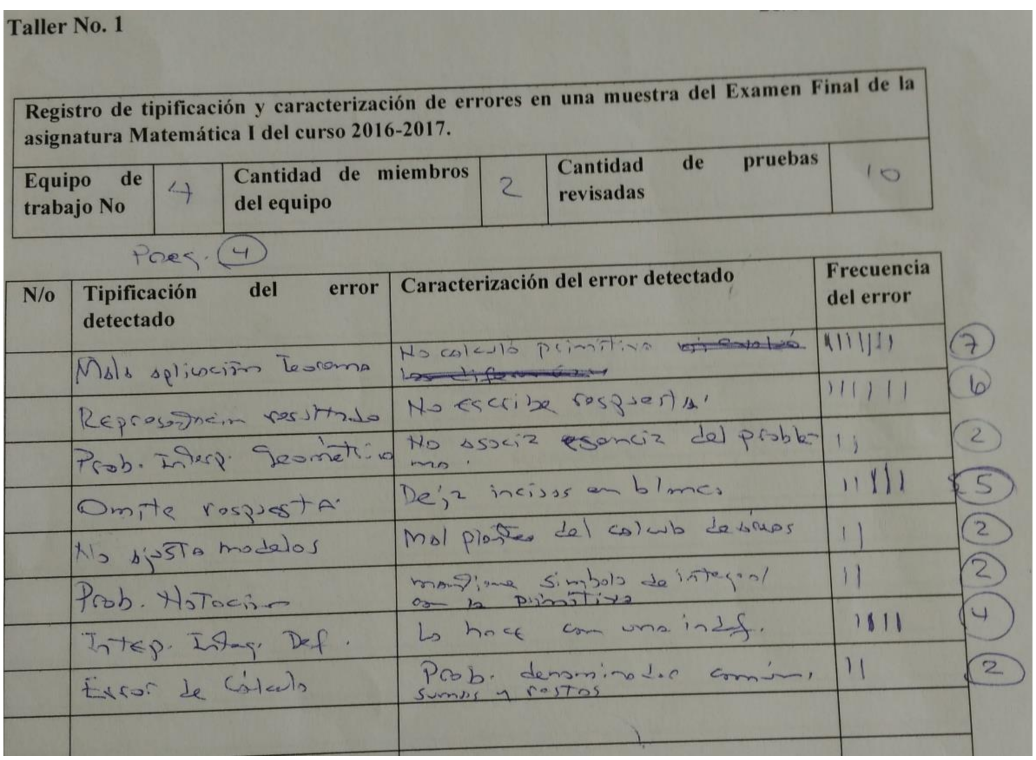
28/6/2018

Taller No. 1

Registro de tipificación y caracterización de errores en una muestra del Examen Final de la asignatura Matemática I del curso 2016-2017.					
Equipo de trabajo No	3	Cantidad de miembros del equipo	2	Cantidad de pruebas revisadas	10

N/o	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	Frecuencia del error
1	Ortográfico		5
2	Contenido	No conoce la regla del producto (no aplica)	6
3	Algebraico	Resolución de ecuaciones $(e^x(x+2))=0$	
4	Contenido	No conoce concepto de función (lo que representa gráficamente no es una función)	6
5	Contenido	Representación Gráfica.	6
6	Contenido	Desconoce el procedimiento de esta	4
7	Notación		

Figura 7 Registro del equipo de trabajo No.3 durante el taller No.1



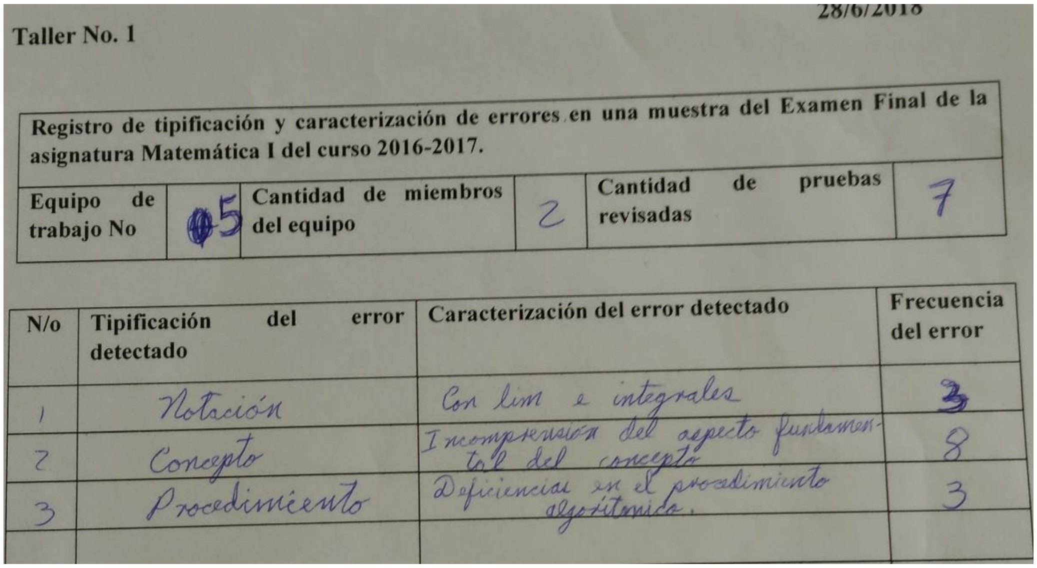
Taller No. 1

Registro de tipificación y caracterización de errores en una muestra del Examen Final de la asignatura Matemática I del curso 2016-2017.					
Equipo de trabajo No	4	Cantidad de miembros del equipo	2	Cantidad de pruebas revisadas	10

Preg. 4

N/o	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	Frecuencia del error	
	Mala aplicación Teorema	No calculó primitiva ~~[illegible]~~	|||||||	7
	Representación resultado	No escribe respuesta	||||||	6
	Prob. Interp. Geométrica	No asocia esencia del problema.	||	2
	Omite respuesta	Deja incisos en blanco	|||||	5
	No ajusta modelos	Mal planteo del cálculo de áreas	||	2
	Prob. Notación	Mantiene símbolo de integral con la primitiva	||	2
	Interp. Integ. Def.	La hace como una indef.	||||	4
	Error de cálculo	Prob. denominador común, sumas y restos	||	2

Figura 8 Registro del equipo de trabajo No.4 durante el taller No.1



28/6/2018

Taller No. 1

Registro de tipificación y caracterización de errores en una muestra del Examen Final de la asignatura Matemática I del curso 2016-2017.					
Equipo de trabajo No	05	Cantidad de miembros del equipo	2	Cantidad de pruebas revisadas	7

N/o	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	Frecuencia del error
1	Notación	Con lim e integrales	3
2	Concepto	Incomprensión del aspecto fundamental del concepto	8
3	Procedimiento	Deficiencias en el procedimiento algorítmico.	3

Figura 9 Registro del equipo de trabajo No.5 durante el taller No.1

ANEXO 4. Planificación del taller de investigación No. 2

Taller No. 2: Una propuesta de tipificación de errores en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática I en la FICI.

Objetivos:

1. Presentar una propuesta de tipificación de los errores que manifiestan los estudiantes en el PEA de la asignatura Matemática I, de una metodología para realizarlo y registrar las opiniones y criterios de los profesores talleristas.
2. Registrar cómo los profesores tipifican y caracterizan los errores que manifiestan sus estudiantes a partir de la propuesta presentada.

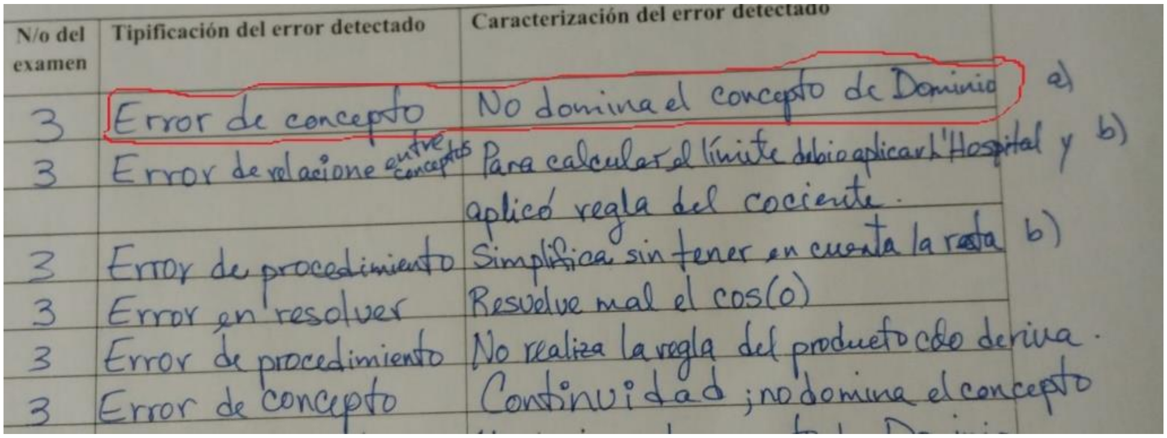
Guion del taller:

Etapas		Actividades	Tiempo de duración
Planificación		3. Convocatoria: Enviar por correo a todos los profesores participantes el tema y objetivos del taller. 4. Coordinar aula o salón con PC y TV.	
Ejecución del taller	Apertura	1. Breve resumen de los resultados del Taller 1, a partir de los objetivos planteados. 2. Enunciar objetivos del Taller 2. 3. Reseña teórica de algunas tendencias en la tipificación de errores según su fuente, a partir de la revisión documental realizada.	10 min 20 min
	Desarrollo	1. Presentar propuesta para la tipificación de errores en el PEA de la Matemática I en la FICI. 2. Registro de opiniones de los talleristas sobre la propuesta presentada. 3. Trabajo en equipos para la tipificación de errores que manifestaron los estudiantes en un examen final de la asignatura Matemática I, utilizando la propuesta presentada.	10 min 30 min 40 min
	Cierre	3. Resumen del taller. 4. Realizar un PNI.	10 min Tiempo total: (2 horas)

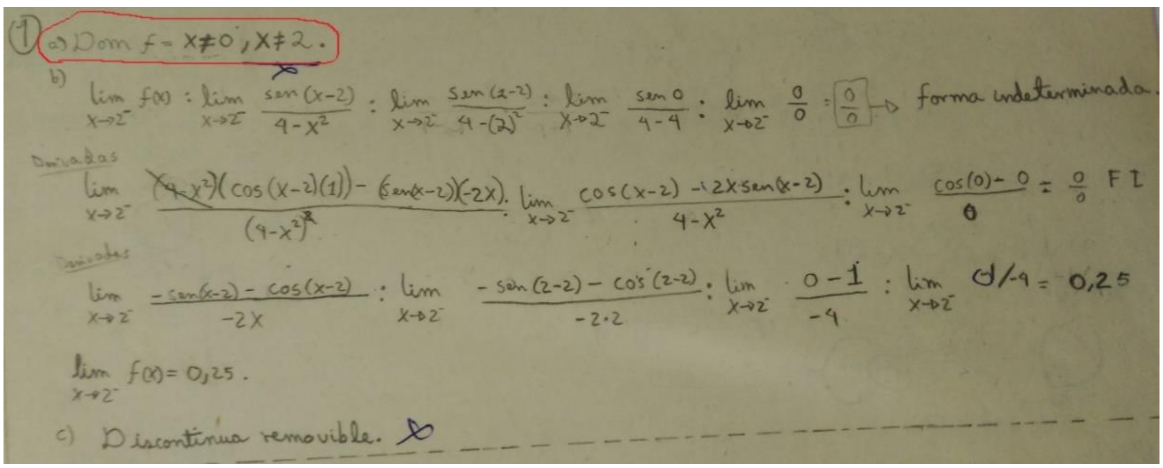
ANEXO 5. Propuesta de tipificación de los errores que manifiestan los estudiantes en el PEA de la asignatura Matemática I

Dimensiones	**Indicadores**	**Escala: 0 o 1**
Error en el contenido específico	Error de concepto	0: No domina el concepto
		1: Domina parcialmente el concepto
	Error de relaciones entre conceptos	0: No establece relación entre conceptos
		1: Relaciona parcialmente los conceptos
	Error de procedimiento	0: No domina el procedimiento
		1: Domina parcialmente el procedimiento
Error en el contenido no específico	Error en recodificar	0: No recodifica o recodifica mal
		1: Recodifica parcialmente
	Error en resolver (*)	0: No resuelve o resuelve mal
		1: Resuelve parcialmente
Dimensiones	**Indicadores**	**Escala: 0 o 1**
Obstáculo	Didáctico	1: Presencia de obstáculo didáctico
		0: No presencia de obstáculo didáctico
	Epistemológico	1: Presencia de obstáculo epistemológico
		0: No presencia de obstáculo epistemológico
(*) El mismo proceder se llevaría a cabo con el resto de las Habilidades Generales Matemáticas, ejemplo "Error en (habilidad)"		

ANEXO 6. Tipificación de errores que realizó un equipo de trabajo durante el taller No.2, referidos al examen de un estudiante



N/o del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio	a)
3	Error de relaciones entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital y aplicó regla del cociente.	b)
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta	b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el cos(0)	
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto cdo deriva.	
3	Error de concepto	Continuidad ; no domina el concepto	



(1) a) Dom $f = x \neq 0, x \neq 2$.

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{sen(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{sen(2-2)}{4-(2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{sen\, 0}{4-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0}{0} = \boxed{\frac{0}{0}} \to$ forma indeterminada.

Derivadas

$\lim_{x\to 2^-} \frac{(4-x^2)(\cos(x-2)(1)) - (sen(x-2))(-2x)}{(4-x^2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cos(x-2) - 2x\,sen(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cos(0) - 0}{0} = \frac{0}{0}$ FI

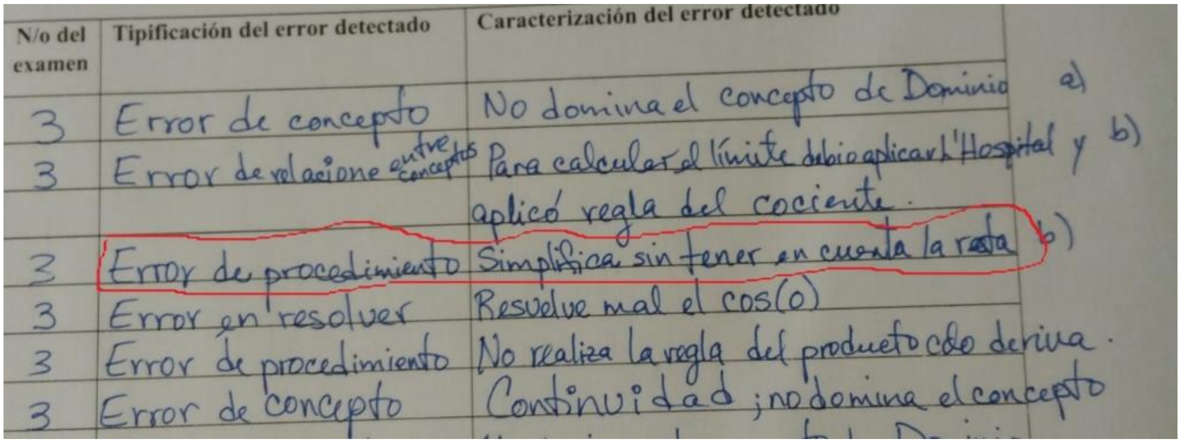
Derivadas

$\lim_{x\to 2^-} \frac{-sen(x-2) - \cos(x-2)}{-2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-sen(2-2) - \cos(2-2)}{-2\cdot 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0-1}{-4} = \frac{-1}{-4} = 0{,}25$

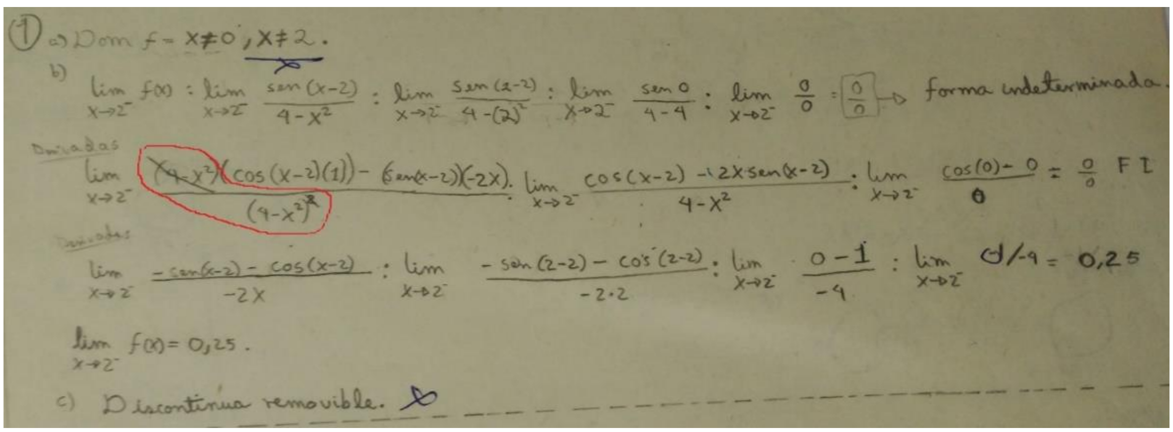
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0{,}25$.

c) Discontinua removible.

Figura 7. Tipificación de error mostrado por un estudiante



N/o del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio	a)
3	Error de relaciones entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital y aplicó regla del cociente.	b)
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta	b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el cos(0)	
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto cdo deriva.	
3	Error de concepto	Continuidad ; no domina el concepto	



① a) Dom $f = x \neq 0, x \neq 2$.

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\text{sen}(2-2)}{4-(2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\text{sen}\,0}{4-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0}{0} = \boxed{\frac{0}{0}} \to$ forma indeterminada.

Derivadas

$\lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(4-x^2)}(\cos(x-2)(1)) - (\text{sen}(x-2))(-2x)}{(4-x^2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cos(x-2) - 2x\,\text{sen}(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cos(0)-0}{0} = \frac{0}{0}$ F I

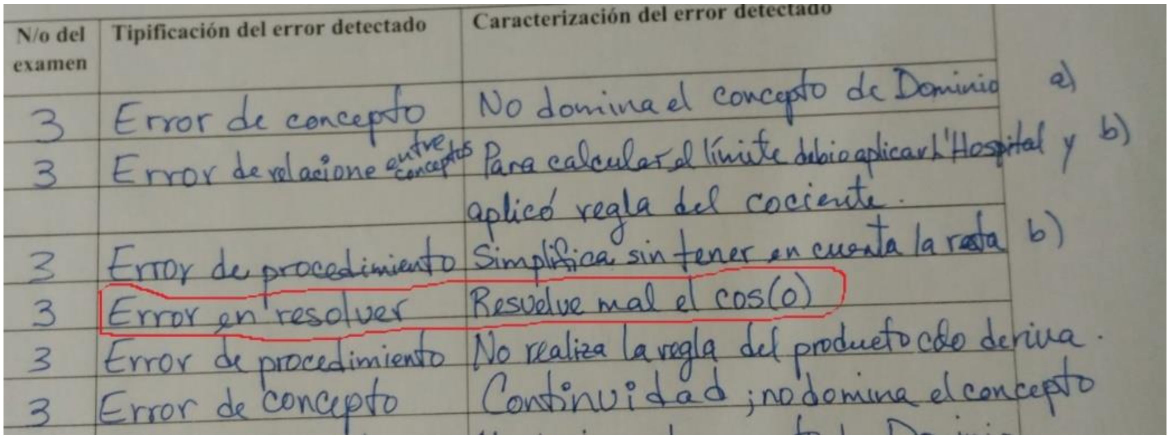
Derivadas

$\lim_{x\to 2^-} \frac{-\text{sen}(x-2) - \cos(x-2)}{-2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\text{sen}(2-2) - \cos(2-2)}{-2\cdot 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0-1}{-4} = \lim_{x\to 2^-} -1/-4 = 0{,}25$

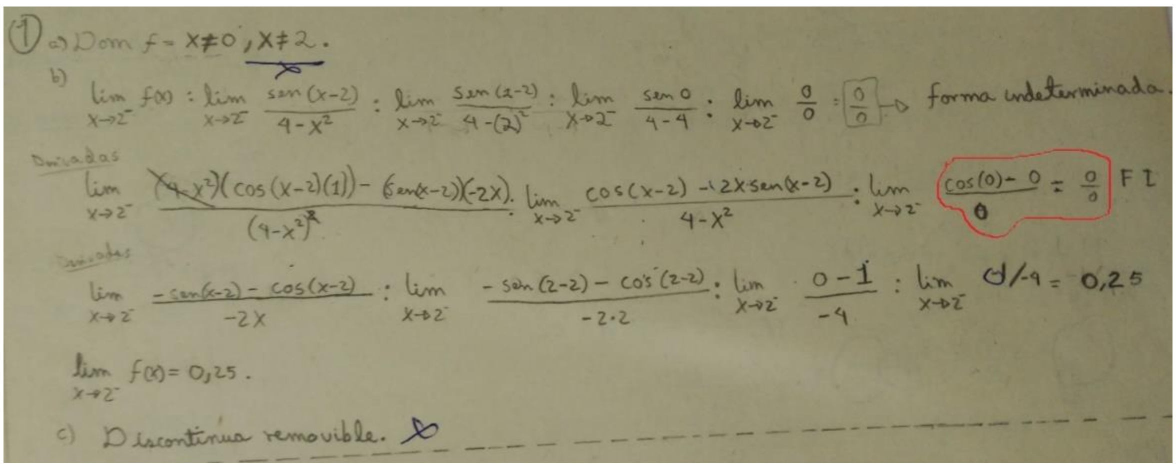
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0{,}25$.

c) Discontinua removible.

Figura 8. Tipificación de error mostrado por un estudiante



N/o del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio	a)
3	Error de relacione entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital y aplicó regla del cociente.	b)
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta	b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el cos(0)	
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto cdo deriva.	
3	Error de concepto	Continuidad; no domina el concepto	



(1) a) Dom f = $x \neq 0, x \neq 2$.

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{sen(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{sen(2-2)}{4-(2)^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{sen\, 0}{4-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{0}{0} = \boxed{\frac{0}{0}} \to$ forma indeterminada.

Derivadas

$\lim_{x \to 2^-} \frac{(4-x^2)(\cos(x-2)(1)) - (sen(x-2))(-2x)}{(4-x^2)^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\cos(x-2) - 2x\, sen(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\cos(0) - 0}{0} = \frac{0}{0}$ F I

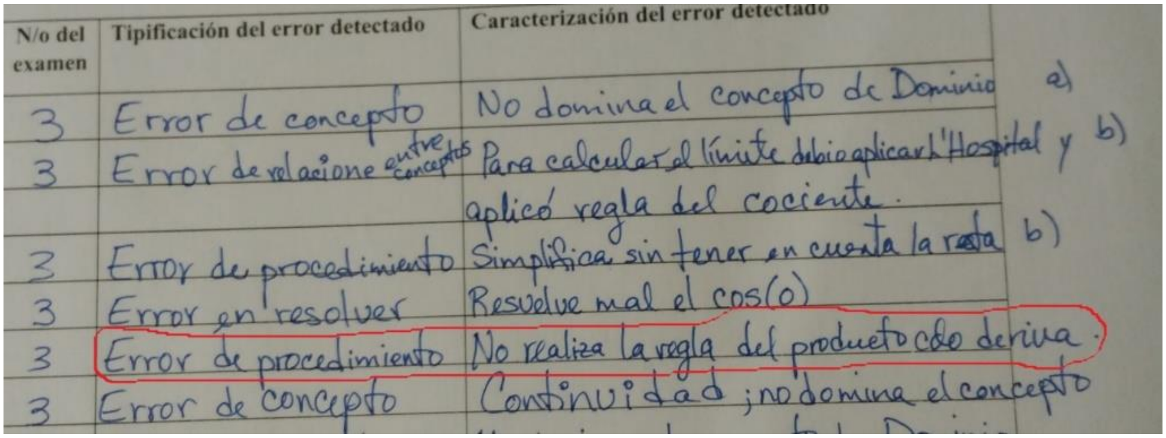
Derivadas

$\lim_{x \to 2^-} \frac{-sen(x-2) - \cos(x-2)}{-2x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-sen(2-2) - \cos(2-2)}{-2 \cdot 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{0-1}{-4} = \lim_{x \to 2^-} -1/-4 = 0,25$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0,25$.

c) Discontinua removible.

Figura 9. Tipificación de error mostrado por un estudiante



N/o del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio	a)
3	Error de relacione entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital y aplicó regla del cociente.	b)
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta	b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el cos(0)	
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto cdo deriva.	
3	Error de concepto	Continuidad; no domina el concepto	

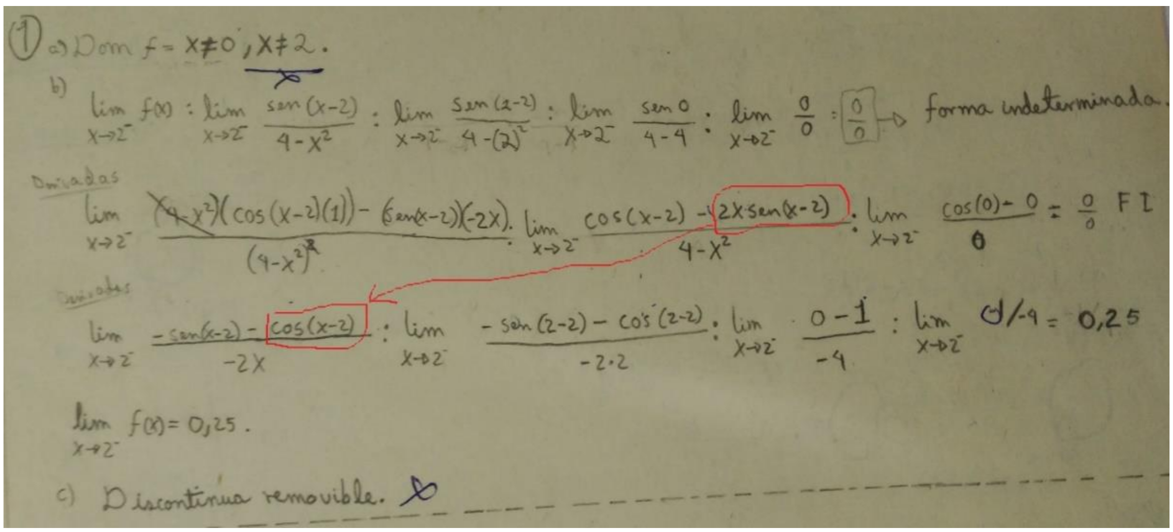


Figura 10. Tipificación de error mostrado por un estudiante

ANEXO 7. Imágenes de los errores tipificados en el ejemplo del epígrafe 2.4, tabla No.1

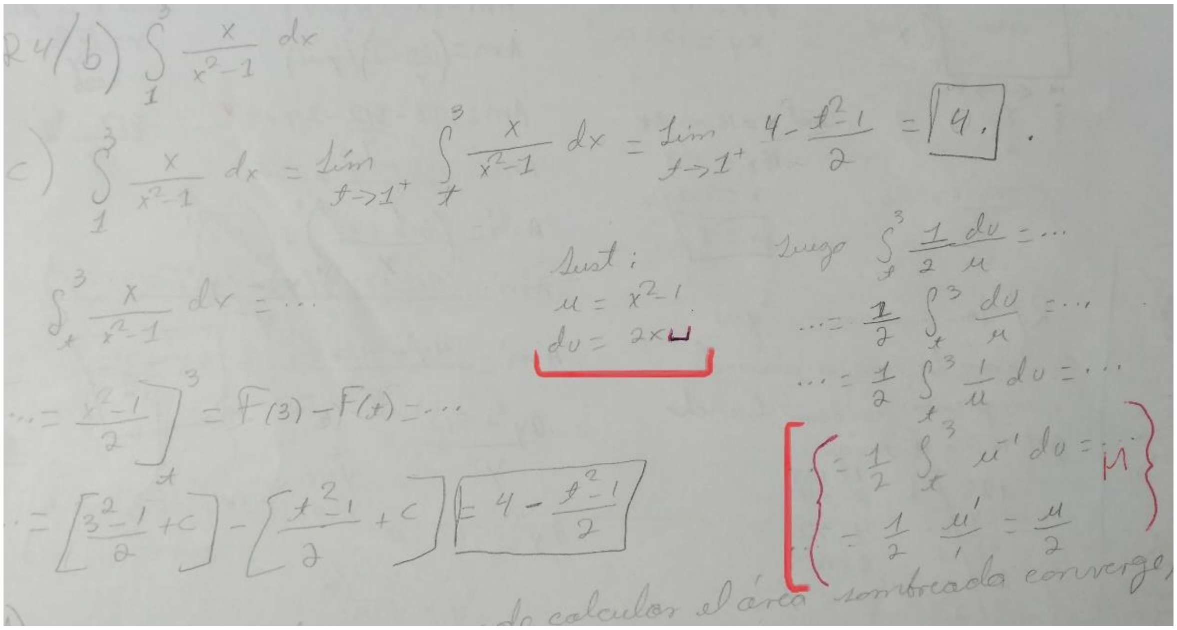


Figura 11. Examen 1, errores 1, 2 y 3 de la Tabla No.1

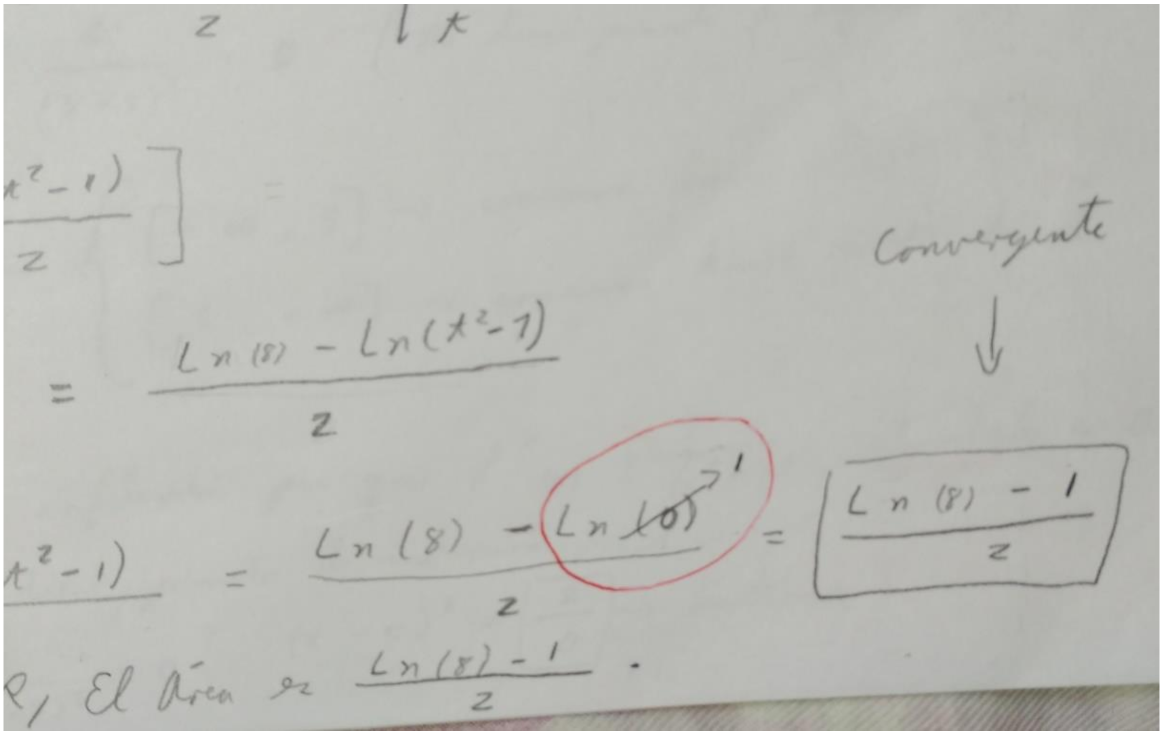


Figura 12. Examen 2, error 4 de la Tabla No.1

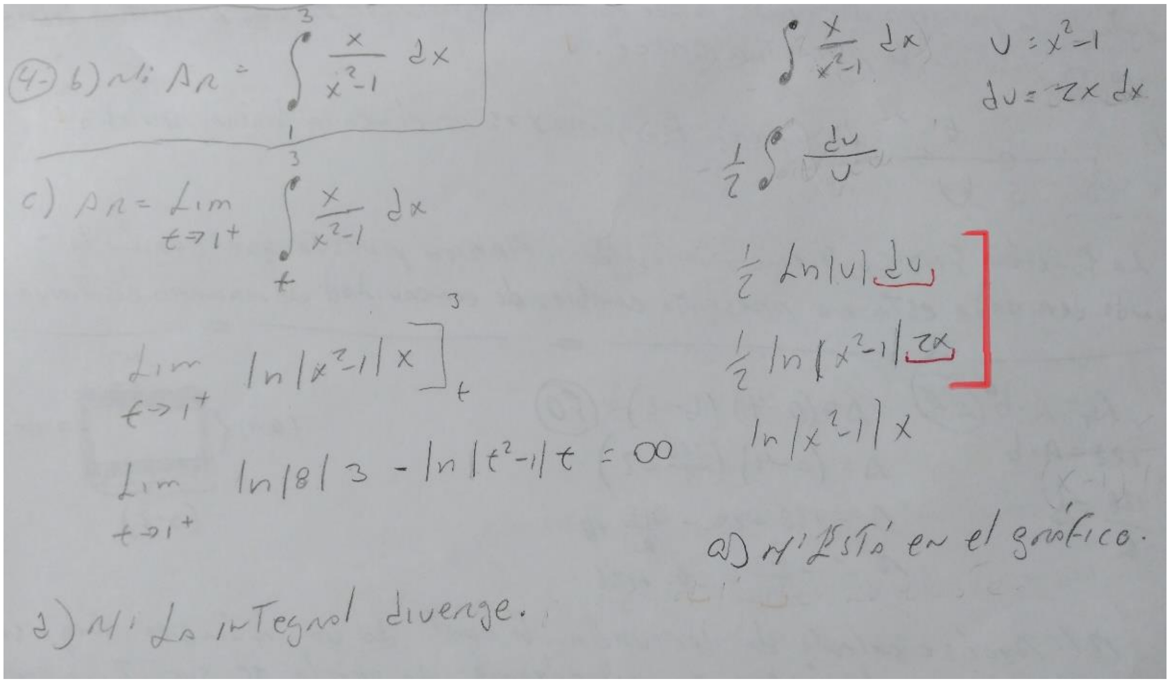


Figura 13. Examen 3, errores 5 y 6 de la Tabla No.1

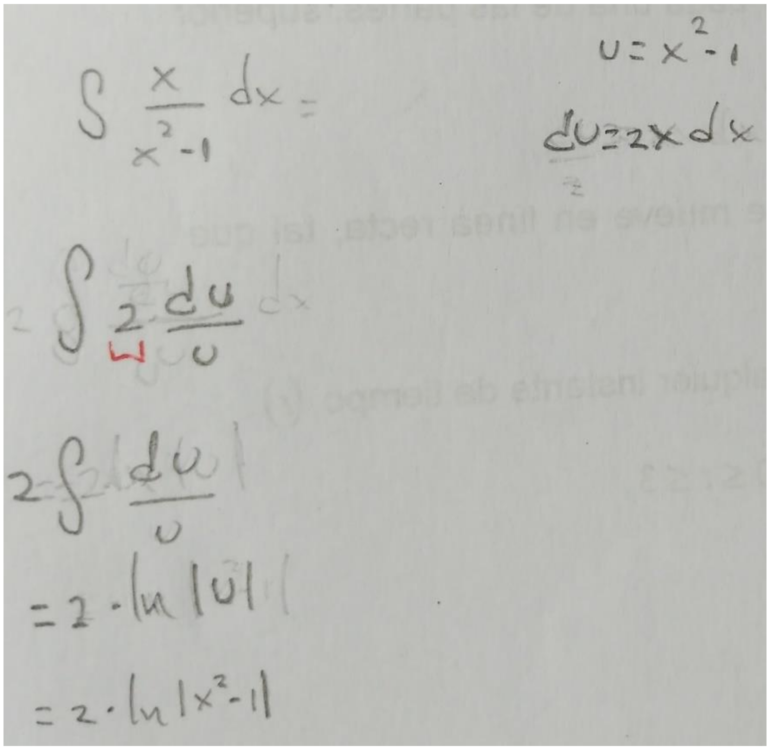


Figura 14. Examen 5, error 7 de la Tabla No.1

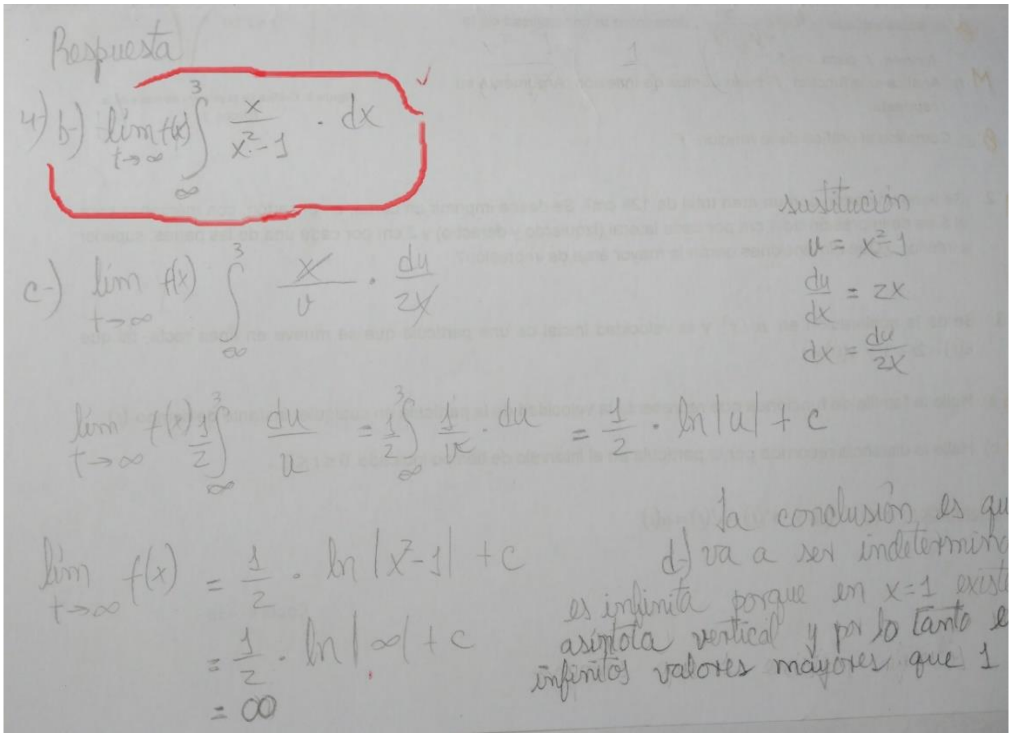


Figura 15 Examen 6, error 8 de la Tabla No.1

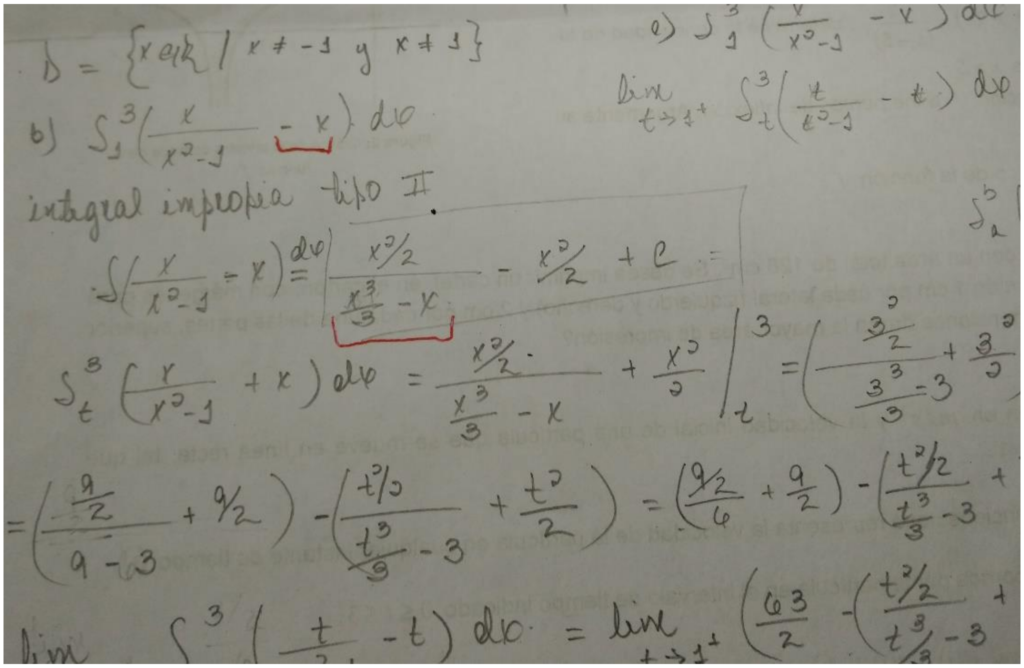


Figura 16 Examen 8, errores 9 y 11 de la Tabla No.1