

Temática: Educación virtual y tecnología educativa

Proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada mediado por objetos dinámicos e interactivos elaborados con GeoGebra

Derivate's Teaching-learning process mediated by dynamic and interactive objects made with GeoGebra

Antonio Rey Roque¹

¹ Universidad de las Ciencias Informáticas. Ave 31, 4020. San Antonio de los Baños. Artemisa. Cuba. antrey@uci.cu

Resumen

La asignatura Matemática II de la disciplina Matemática para Ingeniería en Ciencias Informáticas en el Plan E se diseñó para el estudio del concepto de derivada como eje, uno de los conceptos esenciales del Cálculo infinitesimal, en su concepción se incluyó un sistema de objetos de enseñanza aprendizaje elaborados con el software de geometría dinámica GeoGebra con el objetivo de perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje mediante la utilización de objetos dinámicos e interactivos especialmente concebidos didácticamente para visualizar los conceptos, mediar en la resolución de problemas generales y específicos y como herramienta de cálculo simbólico, numérico y gráfico. En el estudio se empleó una metodología mixta y diferentes métodos como: entrevistas, visitas a clases y encuestas. Para la elaboración de los objetos se realizó un estudio exhaustivo de las potencialidades de GeoGebra y de la didáctica del Cálculo diferencial, así como del diseño curricular de las asignaturas dentro de la disciplina en particular la inserción de la estrategia curricular relacionada con la introducción de las tecnologías informáticas. Como resultado se obtuvo, anexo al programa analítico, la orientación metodológica detallada de cada uno de los 29 objetos, con su descripción, funcionalidad y resultado esperado en el aprendizaje, clasificados según sus funciones dentro del proceso. El programa así concebido y aplicado en cuatro cohortes complementa al de Álgebra, Matemática I y Matemática III, sus efectividades se pueden constatar en los resultados docentes y la receptividad de estudiantes y profesores.

Palabras clave: objetos de aprendizaje, objetos dinámicos, objetos interactivos, derivada, Geogebra

Abstract

The Mathematics II subject of the Mathematics discipline for Computer Science Engineering in Plan E was designed for the study of the concept of derivative as an axis, one of the essential concepts of infinitesimal Calculus, in its conception a system of teaching-learning objects was included prepared with the GeoGebra dynamic geometry software with the aim of improving the teaching-learning process through the use of dynamic and interactive objects specially designed didactically to visualize concepts, mediate in the resolution of general and specific problems and as a symbolic, numerical and graphic calculation tool. The study used a mixed methodology and different methods

such as: interviews, class visits and surveys. For the elaboration of the objects, an exhaustive study of the potentialities of GeoGebra and the didactics of Differential Calculus was carried out, as well as the curricular design of the subjects within the discipline, in particular the insertion of the curricular strategy related to the introduction of the computer technologies. As a result, the detailed methodological orientation of each of the 29 objects was obtained, attached to the analytical program, with their description, functionality and expected result in learning, classified according to their functions within the process. The program thus conceived and applied in four cohorts complements that of Algebra, Mathematics I and Mathematics III, its effectiveness can be verified in the teaching results and the receptivity of students and teachers.

Keywords: *learning objects, dynamic objects, interactive objects, derivative, Geogebra*

Introducción

El concepto de *derivada* de una función es junto al concepto de *límite* y de *integral* la esencia misma del Cálculo, comprenderlo y desarrollar las habilidades mínimas necesarias en los estudiantes de ingeniería para identificar problemas susceptibles de ser modelados mediante derivadas, es objetivo central de las asignaturas de esta rama de la matemática en la carrera.

Miche Artigue, citada por Matamoros, García y Ciscar, (2008) reconoce que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar cálculos de manera mecánica para hallar la derivada de una función y resolver algunos problemas estándar, esto no significa que se logre un aprendizaje satisfactorio del concepto, lo que se manifiesta cuando son capaces de resolver problemas donde tienen que aplicar las reglas de derivación de un modo casi algorítmico pero tienen dificultades cuando se trata de interpretar la derivada como un límite, razón de cambio o geométricamente como la pendiente de la recta tangente a una curva (Matamoros et al, 2008), (Bressoud, Ghedamsi, Martínez-Luaces y Törner, 2016). A pesar de esta conclusión casi unánime en la comunidad de educadores matemáticos en la enseñanza del Cálculo, por razones muy diversas, ha predominado la reducción a lo mecánico y reproductivo en detrimento del aprendizaje conceptual y el desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos.

La efectividad del uso de objetos de aprendizaje bien concebidos y elaborados con calidad es reconocida en trabajos como los de Gordillo, Barra y Quemada (2018), en su estudio sobre esta temática. Esta práctica ha sido una de las principales claves del éxito del aprendizaje potenciado por la tecnología (Gordillo, Barra y Quemada, 2018), sus características de accesibilidad, reusabilidad/adaptabilidad e interoperabilidad les da a estas herramientas digitales ventajas importantes en el propósito de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje (Novillo, González, Facuy, 2018).

Son varios los investigadores que han trabajado el diseño y empleo de objetos de aprendizaje para la enseñanza de la matemática y del concepto de derivada en particular, elaborados con GeoGebra, entre ellos Hohenwarter, Kreis y Lavicza (2008) proponen su empleo como herramientas integradas al mismo proceso de enseñanza aprendizaje. Gil (2019) presenta una guía didáctica para tratar el concepto de derivada utilizando GeoGebra como herramienta, similar a lo propuesto por De los Ríos y Márquez, (2013), Allan, Parra y Martins, (2019) proponen un objeto para el concepto de derivada direccional. No obstante, no abunda el tratamiento sistémico sobre una temática en particular, es decir, el diseño y elaboración de un sistema de objetos para su utilización en el estudio integral de una temática o asignatura en específico, se estila más bien la creación de repositorios de donde los profesores pueden tomar objetos según un objetivo específico, esta situación constituyó una de las motivaciones principales del autor de este trabajo para abordar una tarea de este tipo.

El presente trabajo presenta un sistema de objetos de aprendizaje para el tema *Cálculo diferencial de funciones reales* elaborados con el software dinámico GeoGebra con el objetivo de contribuir a la construcción de significados del concepto de derivada teniendo en cuenta el resultado del estudio realizado por Zandieh (1997, 2000) en el que se consideran las representaciones gráfica, verbal, física y simbólica de este concepto, vistas como instrumentos conceptuales con los que el alumno piensa al resolver problemas. Los objetos de enseñanza-aprendizaje elaborados fueron diseñados sobre la base de esta interacción entre las representaciones. El sistema de objetos concebido y utilizado en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo diferencial (Matemática II en el plan de estudios) complementa trabajos similares realizados para las otras tres asignaturas de la disciplina, cada una orientada a un concepto como eje: Álgebra al concepto de *Transformación lineal*; Matemática I al concepto de *Límite* y Matemática III al concepto e *Integral definida*.

La selección de GeoGebra obedece a que se trata de un software de geometría dinámica que permite con fines didácticos trabajar también el cálculo simbólico y numérico. Es ampliamente utilizado a nivel mundial por la comunidad de educadores no solo de la matemática, también de otras ramas de la ciencia, los límites en su empleo para la enseñanza-aprendizaje están solo en el nivel de creatividad y conocimientos de los profesores y estudiantes. Según Gil (2019) citando a varios investigadores, GeoGebra, por ser dinámico, libre, de código abierto, es ideal para crear objetos matemáticos e interactuar con ellos. GeoGebra es además un asistente matemático, aunque no para cálculos profesionales al estilo de por ejemplo *Mathematica* o *MatLab* sí para lo necesario didácticamente, permite realizar los cálculos no solo numéricos, también simbólicos y por supuesto representar gráficos.

Las dificultades en el aprendizaje del *Cálculo* a nivel universitario, históricamente reconocidas por la comunidad de educadores matemáticos es una motivación constante para abordar procesos de mejora en la enseñanza. Las potencialidades del software seleccionado, la accesibilidad de las tecnologías, las tendencias de la didáctica de la Matemática y la necesidad de que el aprendizaje sea verdaderamente significativo, son razones convincentes para abordar un trabajo de esta índole, para lo cual se ha estructurado un proyecto institucional que permitirá llevar a una escala superior la utilización, validación y continuo perfeccionamiento de este tipo de objetos dinámicos e interactivos en el proceso docente educativo

Materiales y métodos o Metodología computacional

Se realizó un estudio profundo del contenido de la matemática objeto del trabajo: la derivada de funciones reales; del tipo de medio a diseñar e implementar: Objetos de enseñanza-aprendizaje, y de la herramienta a emplear: el software GeoGebra. El tema *Cálculo diferencial* se estudió recurriendo a textos de análisis matemático, artículos relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje de la derivada y sobre todo a la experiencia del autor con más de cuarenta y cinco años en la educación matemática, no solo como docencia directa sino también en el control docente que le permitió la observación de un número importante de clases. Fue confirmado en el estudio, que la enseñanza y en consecuencia el aprendizaje de la derivada, se reduce en muchos casos a un proceso algebraico, mecánico y reproductivo en detrimento del análisis que conlleva la visualización del proceso.

El estudio de los objetos de enseñanza-aprendizaje se realizó a través de artículos científicos, profundizando en los objetos que son dinámicos e interactivos, esta fase permitió establecer qué funcionalidades eran necesarias concretar en los applets de GeoGebra que constituyen los objetos didácticos. La experiencia desarrollada por el autor en el trabajo con GeoGebra más la profundización continua de este software permitieron diseñar y elaborar un sistema de applets en forma de objetos de enseñanza aprendizaje. GeoGebra es un software de geometría dinámica ideal para la creación de objetos no solo de aprendizaje autónomo, también como medios de enseñanza para ser utilizados en las clases presenciales. Esta aplicación permite su mejora continua, es libre y sus posibilidades solo tienen cota en la creatividad y conocimientos del profesor.

Para la validación se tuvieron en cuenta los resultados docentes en las cuatro cohortes del Plan E que han recibido la asignatura mediada el sistema de objetos creado y las entrevistas y encuestas realizadas a estudiantes y profesores, teniendo en cuenta que el objetivo está centrado en la mejora de la comprensión del concepto expresada en el desarrollo de la habilidad para resolver problemas relacionados con el concepto de derivada.

Resultados y discusión

Etapa de diseño de los objetos

Una vez realizado el estudio descrito en el epígrafe anterior de este trabajo, se procedió al diseño de los objetos a partir de la secuencia didáctica establecida en la asignatura, para cada uno se elaboró una ficha, análoga a la de otros objetos elaborados por el autor. Estas fichas contienen el objetivo, las características, las posibilidades de interacción y la descripción de lo que mostrará el objeto.

De acuerdo con la intencionalidad didáctica los objetos se han clasificado en tres grupos definidos por la función que tendrá el objeto:

1. Propiciar la interpretación de conceptos.
2. Visualizar e interactuar con la resolución de problemas generales y particulares por temática.
3. Facilitar la realización de cálculos simbólicos, gráficos y numéricos.

La asignatura está dividida en dos temas, en el primero se introduce y desarrolla el concepto de derivada para funciones reales de una variable real, en el segundo se generaliza el concepto a las funciones reales de dos variables.

Secuencia de objetos para el tema 1

Para el tema 1 se elaboraron dieciséis objetos, algunos tributando a más de una de las funcionalidades u objetivos: 6 (primer objetivo), 10 (segundo objetivo) y 6 (tercer objetivo).

Un primer grupo de seis applets (objetos) se diseñaron para la comprensión del concepto de derivada enfocados a la interpretación gráfica, es decir, como pendiente de la recta tangente a la curva (gráfico de la función) en un punto.

- (1) *InterpretacionPendiente.ggb*: Se dedica a la interpretación de la pendiente de una recta pues es básico para poder enfrentar al concepto mismo de derivada. Muestra gráficamente una recta con los elementos relacionados con su pendiente, propicia la interpretación de la pendiente de una recta como razón de cambio:
- (2) *RectaTangenteDefinicionDerivada.ggb*: Aquí se trabaja la recta, pero como tangente a la curva en un punto para la aproximación a la definición de derivada. Muestra por etapas la gráfica de una función y los elementos relacionados con la definición de la derivada en un punto, iniciando con la representación de una recta secante que al interactuar puede llevarse a ser tangente, en las otras etapas se van incorporando los elementos que conforman la definición de derivada (Fig. 1). Propicia la comprensión del concepto de derivada:



Fig. 1: Definición de la derivada

- (3) *ExistenciaDerivada.ggb*: Una vez definido formalmente el concepto de derivada en un punto es importante tratar las restricciones que impiden su existencia, que están relacionados con la continuidad de la función. El applet muestra la gráfica de una función y los elementos relacionados con la existencia de la derivada en un punto. Propicia la comprensión del concepto de derivada y de las condiciones para su existencia:
- (4) *Diferencial.ggb*: Los conceptos de derivada y de diferencial están en relación directa, este último cobra importancia además para la liberalización y aproximación de funciones, el objeto permite visualizarlo y facilitar su interpretación. Muestra la gráfica de una función y los elementos relacionados con la definición de diferencial de una función en general, pero también una específica seleccionada. Propicia la comprensión del concepto de diferencial.
- (5) *MonotoníaDerivada.ggb*: La relación entre el signo de la derivada y la monotonía tiene no solo interés gráfico, cualquiera sea la interpretación que tenga en una función siempre es posible hacer esta vinculación. El objeto muestra la gráfica de una función y su derivada, el valor de la derivada en el punto en cuestión, y los intervalos de monotonía. Propicia la comprensión de la relación entre la derivada y la monotonía de la función.
- (6) *MonotoníaExtremosConcavidadPuntosInflexión.ggb*: Este sexto objeto creado tributa además a la funcionalidad 2 pues permite además interactuar con los elementos del trazado de la gráfica de una función. Muestra (Fig 2) la gráfica (definida por intervalos (2)) escogida, la tangente en un punto y los elementos relacionados con su monotonía, extremos, concavidad y los puntos de inflexión. Propicia la interpretación de estos elementos relacionados con la función:

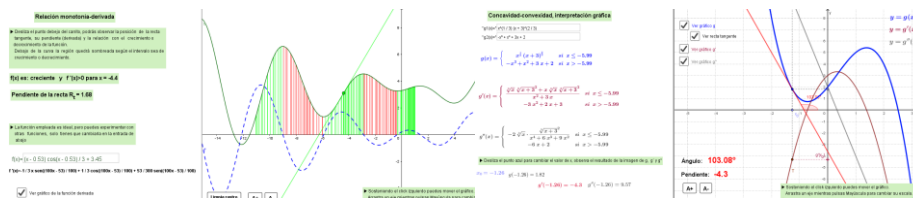


Fig. 2: Relación segunda derivada y concavidad

Además del objeto (6) están elaborados otros nueve para cumplimentar el objetivo 2, son applets para visualizar e interactuar con problemas específicos relacionados con la aplicación de la derivada. El alumno puede interactuar con los elementos del problema lo cual facilita transitar por la fase de interpretación del mismo relacionando el esquema que ilustra la situación con el modelo simbólico y el modelo gráfico (Figura 3):

CilindroAreaMínimaVolumenFijo.ggb, *DistanciaMinima3PuntosRecta.ggb*,
RectanguloAreaMaximaEnParabola.ggb, *FuncionRectanguloAreaMaximaEnParabola.ggb*, *ProblemaCaja VolumenOptimo.ggb*, *FuncionProblemaCaja VolumenOptimo.ggb*, *RectanguloArea MaximaPerimetroFijo.ggb*, *RectanguloPerimetroMinimoAreaFija.ggb*.

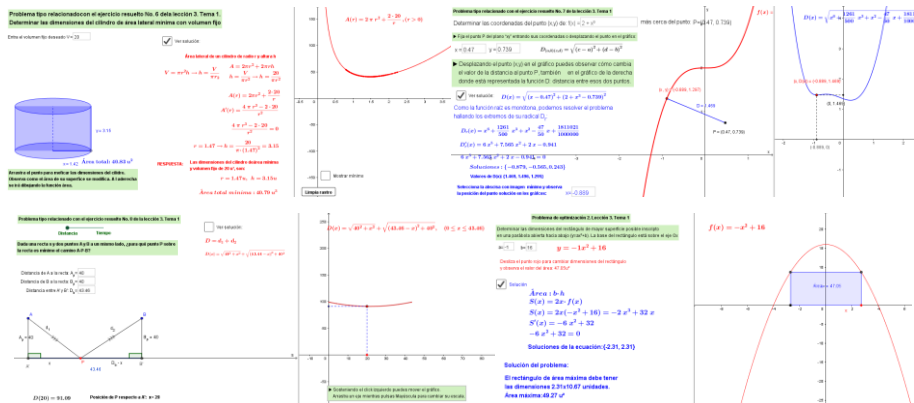


Fig. 3: Imagen ilustrativa

Para el grupo (3) de las funcionalidades se elaboró una especie de calculadora la cual es una herramienta que el alumno puede utilizar al resolver problemas y ejercicios, integra los cálculos simbólicos y los gráficos para el límite y la derivada: *CalculadoraLimiteDerivadaExtremos.ggb*

Secuencia de objetos para el tema 2

El objetivo general del tema 2 es generalizar el concepto de derivada a funciones reales de varias variables independientes, en particular las de dos variables. Es imprescindible primero generalizar el concepto mismo de función, los primeros cuatro objetos se ajustan a la funcionalidad número uno, permiten visualizar a la vez que interactuar con los elementos primordiales que facilitan la comprensión de esta generalización (Figura 4):

- (1) *SistemaCartesianoEspacio.ggb*: El objeto permite interactuar con la representación de un punto en el sistema por sus coordenadas, a la vez que apreciar su ubicación en el plano “xy” ($z = 0$), lo que es importante para determinar y representar el dominio de las funciones de dos variables.

- (2) *PlanosRectasEspacio.ggb*: El objeto permite representar planos, que son las superficies más simples, y rectas presentadas como la intersección entre dos planos. A la dinámica propia del objeto se une la posibilidad de interactuar con los parámetros de las ecuaciones de dos planos y observar su representación gráfica.
- (3) *Funciones2Variables.ggb*: Aunque no se profundizará en la representación de superficies sí se introducirán estas como el gráfico de las funciones reales de dos variables reales. Este objeto permite representar e interactuar con los parámetros correspondientes de este tipo de funciones, además visualizar el dominio y obtener curvas de nivel. Las superficies se muestran en tiempo real con la posibilidad de cambiar el punto de vista y apreciar mucho mejor sus características.
- (4) *LimiteFunciones2Variables*: Para la generalización del concepto de derivada es imprescindible hacerlo con el de límite y de continuidad, para tal propósito se creó este objeto que permite interactuar con el límite de una función incluyendo la consideración de dos trayectorias diferentes.

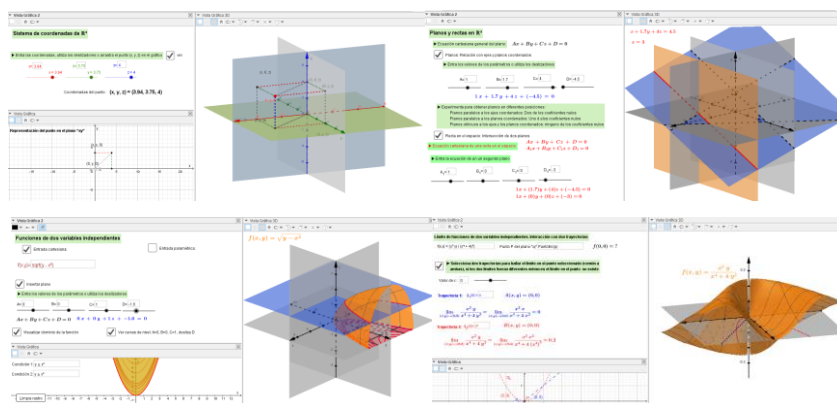


Figura 4: Planos y rectas en el espacio

De esta manera se deja el escenario preparado para generalizar el concepto de derivada y de diferencial, introduciendo las derivadas parciales y las derivadas direccionales, para lo cual se crearon dos objetos que también responden a la funcionalidad uno, que permiten interactuar con los elementos necesarios para visualizar las derivadas y la interpretación gráfica del diferencial.

- (5) *DerivadaDireccionalParciales.ggb* y *DiferencialesR^3.ggb*:

Una vez comprendido el concepto generalizado de la derivada y del diferencial se pasa a la resolución de problemas de aplicación, los objetos elaborados: *ExtremosFunciones2Variables.ggb*, *CajaAreaFijaVolumenMaximo.ggb*, *CajaInscritaVolumen máximo.ggb*, *DistanciaPuntoASemicono.ggb*.

Impacto en el proceso de enseñanza aprendizaje de Matemática II: Cálculo diferencial

La introducción de los presentados en el trabajo tuvieron como precedente los que se diseñaron, elaboraron y utilizaron en la asignatura Matemática I, cuya primer versión fue en la modalidad a distancia, esta cohorte está cursando el 4to año en el presente curso de 2023 por lo que recibieron las tres asignaturas de Cálculo mediadas por la utilización de ese tipo de objetos digitales. El sistema de objetos para el *Cálculo diferencial* está siendo utilizado por tercera vez.

Los sistemas de objetos se han introducido en los cursos de cada asignatura en el *Entorno Virtual de Aprendizaje*, como repositorio y en tareas donde se deben resolver ejercicios y problemas con su utilización, además de videos con explicación del funcionamiento de varios de los applets.

El impacto en los profesores es notable pues aunque aun no es generalizado, todos coinciden en que la mediación de los objetos de enseñanza aprendizaje facilita la enseñanza al utilizarlos como medios en la clase y como herramienta para elaborar materiales de estudio y ejercicios.

Los estudiantes en general lo reciben con mucho interés aunque su utilización para la autopreparación y autoaprendizaje lo limita la tenencia o no de la tecnología adecuada, personal y en los laboratorios docentes. Los resultados académicos muestran un salto de calidad más que de cantidad en los aprobados, pues las preguntas en los instrumentos evaluativos en una proporción más elevada tienden a ser menos tradicionales y sí ajustadas a estas tecnologías.

Como perspectiva se ha diseñado y está en ejecución para los cursos 2023 y 2024, un proyecto de innovación institucional que permitirá perfeccionar y validar la mediación de este tipo de objetos en el proceso de enseñanza aprendizaje de las asignaturas de la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería en ciencias informáticas.

Conclusiones

- Con el estudio realizado se logró diseñar y elaborar un sistema de objetos de aprendizaje dinámicos e interactivos para el tema *Cálculo diferencial de funciones reales* articulados sistémicamente en la secuencia didáctica que marca el programa de la asignatura Matemática II.
- Los objetos permiten relacionar las diferentes representaciones del concepto de derivada de manera dinámica e interactiva.
- Los applets con las funcionalidades (2) y (3) son objetos no solo de aprendizaje, también proveen al profesor de herramientas para la elaboración de ejercicios y problemas, además de medios gráficos para las clases y sus presentaciones.

- Cada objeto por sí solo no garantiza su efectividad, debe estar acompañado de una guía de trabajo para el informe de la práctica, con ejemplos y problemas a resolver por el alumno.

Referencias

- Allan, M.C., Parra, S., Martins, A. (2019). Objetos de Aprendizaje para la enseñanza de Derivadas Direccionales: diseño, implementación y evaluación En: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/90736>. Consultado: 2 de septiembre 2022
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Törner, G. (2016). Teaching and Learning of Calculus. 10.1007/978-3-319-32975-8_1.
- De los Ríos, C.; Marquez, V.C (2013). Una propuesta para la enseñanza de la derivada con GeoGebra. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya
- Gil Vera, Victor. (2019). Teaching of the Concept of the Derivative with Geogebra: A Didactic Guide from the Classroom. 6. 63 - 72.
- Gordillo, Barra, & Quemada. (2018). Estimación de calidad de objetos de aprendizaje en repositorios de recursos educativos abiertos basada en las interacciones de los estudiantes. (spanish). Educación XX1, 285-301.
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y. y Lavicza, Z. (2008). Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra.
- Matamoros, G., García Blanco, M. y Ciscar, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, ISSN 1665-2436, Vol. 11, Nº. 2, 2008, págs. 267-296. 11.
- Novillo Maldonado, E; González Sánchez, J; Facuy Delgado, J. (2018). Objetos digitales de aprendizaje. En: J. Guerrero Jirón, Ana Rodríguez Méndez, J. Facuy Delgado (UTMACH). Herramientas pedagógicas para un proceso de enseñanza innovado (pp. 147-170). Machala. Ecuador.
- Zandieth, M. (1997). The evolution of student understanding of the concept of derivate. Tesis de doctorado, Oregon State University.
- Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education (volume 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.